

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

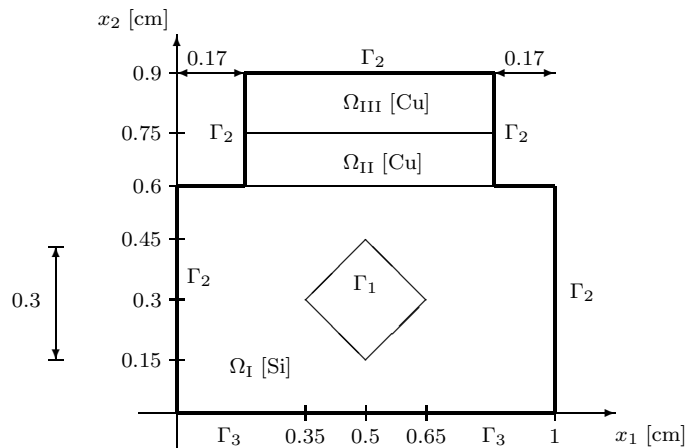
“Mathematische Modelle in der Technik“

PS II

31.10. 2013 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵ Raum : S2 044) : **5** - **8**

1.3 Wärmeleitung in einer dünnen Platte

- **Physikalisches Problem** : Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_I \cup \bar{\Omega}_{II} \cup \bar{\Omega}_{III}$, in einer dünnen Platte „CHIP“ der Art



mit einer Plattendicke von $d = 0.01$ cm und mit den Daten

- Wärmeleitkoeffizienten

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{Si} = 0.01 \left[\frac{W}{cm K} \right], & x \in \bar{\Omega}_I \\ \lambda_{Cu} = 3.95 \left[\frac{W}{cm K} \right], & x \in \bar{\Omega}_{II} \cup \bar{\Omega}_{III} \end{cases}$$

↑
isotrop

- $a \equiv 0$ (kein Wärmeaustausch in z -Richtung),

- Wärmequellen:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \Omega_I \cup \Omega_{III}, \\ -0.4545454 \cdot 2^k [W/cm^3], & x \in \Omega_{II} \text{ (Kühlung)}, \end{cases}$$

wobei $k = \text{letzte Ziffer der Matrikelnummer} \in \{0, 1, \dots, 9\}$,

- Randbedingungen (RB) auf $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$:

1. $\Gamma_1 = \text{Rand des Loches: } u = g_1 := 300 \text{ K}$,
2. $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma \setminus \Gamma_3$: $\frac{\partial u}{\partial N} = g_2 := 0$ auf Γ_2 (Wärmeisolation),
3. $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$: $\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(g_3 - u)$ auf Γ_3
mit $g_3 = 25^\circ C$, $\alpha = 0.2 [W/(cm^2 K)]$.

- 5] Man leite die stationäre Wärmeleitgleichung zur Bestimmung der Temperaturverteilung $u(x)$ in der **integralen Form** (= Bilanzform) her.
- 6] Geben Sie die **klassische Formulierung**, d.h. die PDgl. in Ω_I , Ω_{II} und Ω_{III} , die Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{II}$ und $\bar{\Omega}_{II} \cap \bar{\Omega}_{III}$ sowie die Randbedingungen an !
- 7] Leiten Sie die **Variationsformulierung** in der Form

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}_0, \quad (1.1)$$

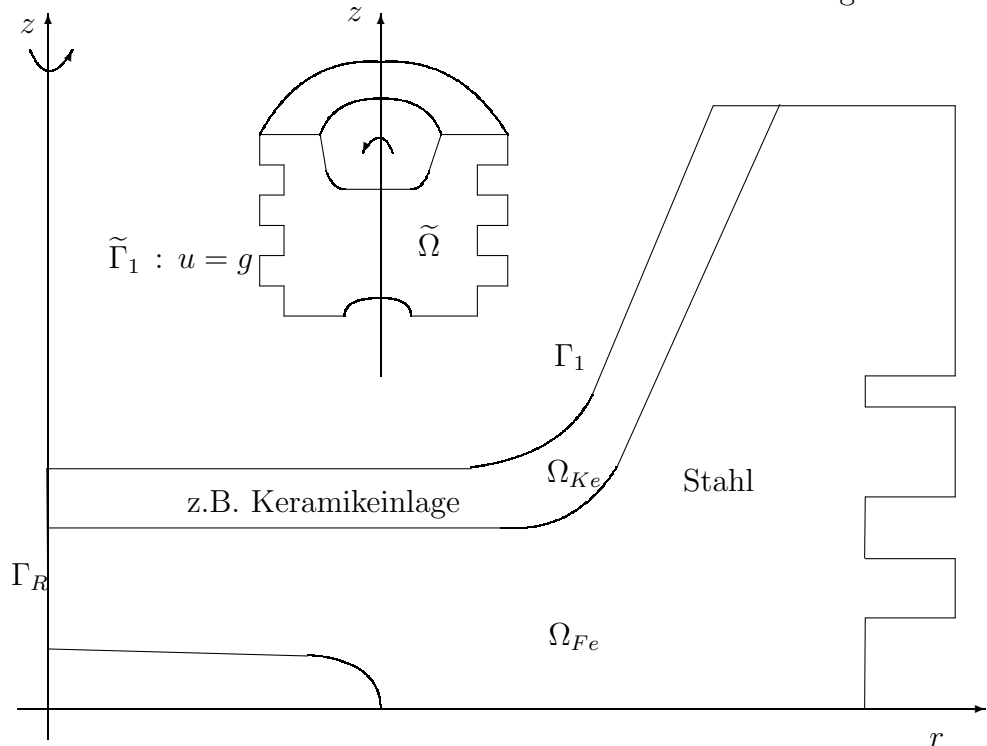
$$\begin{aligned} \text{d.h., } \mathbf{V}_g &= ? \\ \mathbf{V}_0 &= ? \\ a(u, v) &= ? \\ \langle F, v \rangle &= ? \end{aligned}$$

her.

- 8] Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genau Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.1) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl. in Ω_I , Ω_{II} und Ω_{III} ; Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_I \cap \bar{\Omega}_{II}$ und $\bar{\Omega}_{II} \cap \bar{\Omega}_{III}$; Randbedingungen) löst !

1.4 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit φ -unabhängigen Eingangsdaten (Teamprojekt 1)

- Modellproblem "Kolben" : Betrachten das Wärmeleitproblem für den Ober- teil des Kolbens eines Verbrennungsmotors



unter den Voraussetzungen :

1) $\tilde{\Omega} = \int_{\varphi}^{\varphi} \bar{\Omega} := \{ (r, z, \varphi) : (r, z) \in \bar{\Omega}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \} = \bar{\Omega} \times [0, 2\pi[$

2) Daten $\{ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, f, g, \dots \}$ sind φ unabhängig,

wobei (x_1, x_2, x_3) -Kartesische Koordinaten,

(r, z, φ) -Zylinderkoordinaten sind.

Die gesuchte Temperaturverteilung $u(x_1, x_2, x_3) = u(r, z)$ ist damit φ -unabhängig.

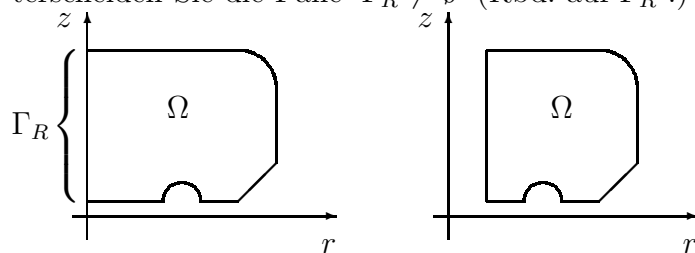
5-TP Man schreibe die Wärmeleitgleichung

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) &= f(x) \quad x \in \tilde{\Omega} \\ \text{mit den Randbedingungen} \\ u &= g_1 \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} &= \alpha(u - g_3) \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_3 = \Gamma_3 \times [0, 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

für den rotationssymmetrischen Fall $\tilde{\Omega} = \bar{\Omega} \times [0, 2\pi)$ mit φ -unabhängigen Eingangsdaten $\{ \lambda, f, g_i, \alpha \}$ auf, d.h. durch den Übergang von den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zu Zylinderkoordinaten (r, z, φ) mittels

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z$$

kann der 3D-RWA in $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2D-RWA im Gebiet Ω zugeordnet werden. Unterscheiden Sie die Fälle $\Gamma_R \neq \emptyset$ (Rbd. auf Γ_R !) und $\Gamma_R = \emptyset$ (Gebiet mit Loch).



6-TP Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem “*Kolben*“ Querschnittsgebiet (2D) auf. Beachten Sie das Vorhandensein eines Interfaces zwischen Stahl und Keramikeinlage (Interface-Bedingung).

7-TP Leiten Sie die **Variationsformulierung**

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}_0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{d.h., } \mathbf{V}_g &= ? \\ \mathbf{V}_0 &= ? \\ a(u, v) &= ? \\ \langle F, v \rangle &= ? \end{aligned}$$

her !

8-TP Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genaue Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.3) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl., Interfacebedingungen, Randbedingungen) löst ! Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang auch die Beziehungen zwischen Integralbilanzformulierung und verallgemeinerte Formulierung !