P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik”

$\boxed{\textbf{PS I}}$ 17.10. 2013 (Zeit : $10^{\underline{15}} - 11^{\underline{45}}$) Raum : S2 044 : $\boxed{1}$ - $\boxed{4}$

1 Wärmeleit- und Wärmetransportprobleme

1.1 Analytische Hilfsmittel

$\boxed{1}$ Man zeige, dass

a)

$$\lim_{\triangle x_1,\triangle x_2,\triangle x_3\to 0} \frac{1}{\triangle x_1 \triangle x_2 \triangle x_3} \int\limits_{x_1-\frac{\triangle x_1}{2}}^{x_1+\frac{\triangle x_1}{2}} \int\limits_{x_2-\frac{\triangle x_2}{2}}^{x_2+\frac{\triangle x_2}{2}} \int\limits_{x_3-\frac{\triangle x_3}{2}}^{x_3+\frac{\triangle x_3}{2}} f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\, d\xi_3\, d\xi_2\, d\xi_1 \quad = \quad f(x_1,x_2,x_3)$$

gilt, falls $f \in C(\Omega)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$,

b)

$$\lim_{\triangle x_1,\triangle x_2,\triangle x_3\to 0} \frac{1}{\triangle x_1 \triangle x_2 \triangle x_3} \int\limits_{x_1-\frac{\triangle x_1}{2}}^{x_1+\frac{\triangle x_1}{2}} \int\limits_{x_3-\frac{\triangle x_3}{2}}^{x_3+\frac{\triangle x_3}{2}} \Big[\sigma(\xi_1, x_2+\frac{\triangle x_2}{2},\xi_3) - \sigma(\xi_1, x_2-\frac{\triangle x_2}{2},\xi_3)\Big]\, d\xi_3\, d\xi_1 \quad = \quad \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_2}$$

gilt, falls $\sigma \in C^1(\Omega)$.

c) Wie kann man die Voraussetzungen an f in a) bzw. an σ in b) abschwächen ?

1.2 Analytische Lösung und Parameterstudien

$\boxed{2}$ Berechnen Sie analytisch das Temperaturfeld $u(\cdot)$ gemäss der Wärmeleitgleichung (1.5) aus der Vorlesung für die Daten:
$a = 0, b = 1, \eta \in (0,1)$ fix, $q = 0, f = 0, g_a = 0, g_b = 1$ und

$$\lambda(x) := \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & \text{const} > 0 \;\text{ für }\; x < \eta \\ \lambda_2 & = & \text{const} > 0 \;\text{ für }\; x > \eta \end{array} \right\}$$

mit $0 < \lambda_2 < \lambda_1$!

Führen Sie Parameterstudien mit dem Wärmeleitkoeffizienten durch:

a) $\lambda_2 \longrightarrow 0$

b) $\lambda_1 \longrightarrow \infty$

$\boxed{3}$ Wir betrachten wieder das Wärmeleitproblem aus $\boxed{2}$ aber jetzt mit freiem Wärmeübergang an den Randpunkten

$$\lambda_1 u'(a) = \alpha_a u(a)$$

$$-\lambda_2 u'(b) = \alpha_b (u(b) - 1)$$

mit positiven Wärmeübergangszahlen α_a und α_b. Berechnen Sie wieder analytisch das Temperaturfeld $u(\cdot)$ und führen Sie jetzt Parameterstudien mit der Wärmeübergangszahl α durch:

a) $\alpha_a \longrightarrow \infty$

b) $\alpha_b \longrightarrow \infty$

$\boxed{4}$ Bestimmen Sie die von einem (fixierten) Parameter $y \in (0,1)$ abhängige Lösung $u_y(\cdot)$ der Randwertaufgabe (Wärmeleitproblem mit Punktquelle)

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \delta(x-y),\ x \in (0,1) \qquad (f_y = 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy,\ x \in [0,1]$$

mit $G(x,y) := u_y(x)$ die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

wobei f eine gegebene stetige Funktion ist.