ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 26. 06. 2013

---

1. **Stationäre Temperaturverteilung einer kreisförmigen Platte**

   Die kreisförmige Platte wird durch den Abschluss der Menge

   $$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$$

   beschrieben. Wir nehmen an, dass die Oberfläche der Platte isoliert ist (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung). Dann erfüllt die Temperaturverteilung $u(x, y)$ im stationären Fall (unter bestimmten vereinfachenden Annahmen) die Laplace-Gleichung

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega$$

   Die Temperatur am Rand

   $$\Gamma = \partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

   der Platte sei vorgegeben:

   $$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Gamma.$$

   Die Bestimmung der Temperaturverteilung $u(x, y)$ führt also auf ein Randwertproblem für die Laplace-Gleichung.

   Lösung:

   Transformation der Differentialgleichung auf Polarkoordinaten:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(r, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } (r, \varphi) \in (0, 1) \times [-\pi, \pi]$$

   Randbedingung:

   $$u(1, \varphi) = f(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in [-\pi, \pi]$$

   mit $f(\varphi) = g(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

   Separationsansatz:

   $$u(r, \varphi) = v(r)\, w(\varphi)$$

   Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

   $$v''(r)\, w(\varphi) + \frac{1}{r}\, v'(r)\, w(\varphi) + \frac{1}{r^2}\, v(t)\, w''(\varphi) = 0$$

und somit
$$\frac{1}{v(r)}\left[v''(r)+\frac{1}{r}\,v'(r)\right]=-\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)}=\lambda,$$
wobei λ eine Konstante sein muss. Also
$$v''(r)+\frac{1}{r}\,v'(r)=\frac{\lambda}{r^2}\,v(t)\quad\text{und}\quad -\,w''(\varphi)=\lambda\,w(\varphi)$$
Zusätzlich muss $w(\varphi)$ 2π-periodisch sein. Daher erhält (ähnlich wie bei der Diskussion der Wärmeleitungsgleichung)
$$\lambda=n^2,\quad n\in\mathbb{N}_0$$
und $w(\varphi)$ ist eine beliebige Linearkombination von
$$\cos n\varphi\quad\text{und}\quad\sin n\varphi.$$
Nach Multiplikation mit r^2 entsteht folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $v(r)$:
$$r^2\,v''(r)+r\,v'(r)-n^2\,v(t)=0.$$
(Spezialfall einer so genannten Eulerschen Differentialgleichung). Daraus erhält man für $y(s)=v(r)$ mit $r=e^s$ eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:
$$y''(s)-n^2y(s)=0.$$
Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind Linearkombinationen der Funktionen
$$e^{ns}=r^n\quad\text{und}\quad e^{-ns}=r^{-n}.$$
Die zweite Lösung scheidet aus, da sie im Punkt $(x,y)=(0,0)$ unbeschränkt wird. Somit erhalten wir für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ Lösungen $u_n(r,\varphi)$ als Linearkombinationen der Funktionen
$$r^n\,\cos n\varphi\quad\text{und}\quad r^n\,\sin n\varphi.$$
Daraus entstehen Lösungen der Laplace-Gleichung der Form
$$u(r,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\,(a_n\,\cos n\varphi+b_n\,\sin n\varphi).$$
Um die Randbedingung zu erfüllen, muss gelten:
$$u(1,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\cos n\varphi+b_n\,\sin n\varphi)=f(\varphi)$$
Also sind die Koeffizienten a_n und b_n die Koffizienten der Fourier-Reihe von f:
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\cos nt\,dt,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\sin nt\,dt.$$

Die Lösung lässt sich damit auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \underbrace{(\cos nt \cos n\varphi + \sin nt \sin n\varphi)}_{\cos n(\varphi - t)}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\varphi - t)\right] dt.
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\xi &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(e^{in\xi} + e^{-in\xi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\xi})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (re^{-i\xi})^n - 1 \\
&= \frac{1}{1 - re^{i\xi}} + \frac{1}{1 - re^{-i\xi}} - 1 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\xi + r^2}.
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir schließlich die folgende Darstellung der Lösung (Poissonsche Integralformel):

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - t) + r^2}\, dt.$$

2. **Schwingungen einer kreisförmigen Membran**

Die kreisförmige Membran wird durch den Abschluss der Menge

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$$

beschrieben. Wir nehmen an, dass keine äußeren Kräfte auf die Membran wirkt. Dann erfüllt die vertikale Auslenkung $u(x,y,t)$ (unter bestimmten vereinfachenden Annahmen) die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t) \quad \text{für alle } (x,y,t) \in Q = \Omega \times (0,\infty)$$

Die Membran sei am Rand

$$\Gamma = \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

fest eingespannt:

$$u(x,y,t) = 0 \quad \text{für alle } (x,y,t) \in \Gamma \times (0,\infty).$$

Zum Anfangszeitpunkt sind die Auslenkung und die zeitliche Änderung der Auslenkung vorgegeben:

$$u(x,y,0) = u_0(x,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = v_0(x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Die Bestimmung der vertikalen Auslenkung $u(x,y,t)$ führt also auf ein Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung.

Lösung:

Separationsansatz:

$$u(x,y,t) = v(t)\,w(x,y)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$v''(t)\,w(x,y) = v(t)\,\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y)\right)$$

und somit

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{1}{w(x,y)}\,\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y)\right) = -\lambda,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante sein muss. Also

$$-v''(t) = \lambda\,v(t) \quad \text{und} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) = \lambda\,w(x,y).$$

Randbedingung:

$$w(x,y) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in \Gamma.$$

Es lässt sich zeigen, dass $\lambda > 0$: Durch Multiplikation der zweiten Differentialgleichung mit w und anschließender Integration folgt

$$-\int_\Omega w(x,y)\,\Delta w(x,y)\;d(x,y) = \lambda \int_\Omega w(x,y)^2\;d(x,y).$$

Mit Hilfe der 1. Greenschen Identität folgt

$$\underbrace{\int_\Omega \|\nabla w(x,y)\|^2\;d(x,y)}_{\geq 0} = \lambda\,\underbrace{\int_\Omega w(x,y)^2\;d(x,y)}_{>0}.$$

Die Funktionen $v(t)$ sind Linearkombinationen von

$$\cos \mu t \quad \text{und} \quad \sin \mu t \quad \text{mit} \quad \mu = \sqrt{\lambda}.$$

Die Differentialgleichung für w lautet in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \lambda\,w = 0$$

Randbedingung:

$$w(1,\varphi) = 0$$

Separationsansatz für w:

$$w(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$R''(r)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}\,R'(r)\,\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\,R(r)\,\Phi''(\varphi) + \lambda\,R(r)\,\Phi(\varphi) = 0$$

und somit

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[R''(r) + \frac{1}{r}\,R'(r) + \lambda\,R(r)\right] = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu,$$

wobei $\nu \in \mathbb{R}$ eine Konstante sein muss. Also

$$\Phi''(\varphi) + \nu\,\Phi(\varphi) = 0$$

und

$$r^2\,R''(r) + r\,R'(r) + \lambda\,r^2\,R(r) = \nu\,R(r)$$

Randbedingung:

$$R(1) = 0$$

Zusätzlich muss $\Phi(\varphi)$ 2π-periodisch sein. Daher erhält (ähnlich wie bei der Diskussion der Wärmeleitungsgleichung)

$$\nu = n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und $\Phi(\varphi)$ ist eine beliebige Linearkombination von

$$\cos n\varphi \quad \text{und} \quad \sin n\varphi.$$

Die dazugehörigen Lösungen $R(r)$ erfüllen dann die Differentialgleichung

$$r^2\,R''(r) + r\,R'(r) + (\lambda\,r^2 - n^2)\,R(r) = 0$$

Daraus erhält man für $y(s) = R(r)$ mit $s = \sqrt{\lambda}\,r$ die so genannte Besselsche Differentialgleichung

$$s^2\,y''(s) + s\,y'(s) + (s^2 - n^2)\,y(s) = 0$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung erhält man durch einen Potenzreihenansatz:

$$J_n(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\,\left(\frac{s}{2}\right)^{2k}$$

Randbedingung:

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Die n-te Bessel-Funktion $J_n(x)$ hat abzählbar viele positive Nullstellen μ_{nm}, $m \in \mathbb{N}$. Also muss gelten

$$\lambda = \mu_{nm}^2$$

und man erhält die entsprechenden Lösungen

$$R_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm}\, r).$$

Das führt auf folgende Lösungen $w(r,\varphi)$:

$$J_n(\mu_{nm} r) \cos n\varphi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad J_n(\mu_{nm} r) \sin n\varphi \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus entstehen Lösungen der Wellengleichung der Form

$$\begin{aligned} u(r,\varphi,t) = \sum_{n,m} J_n(\mu_{nm} r) \Big(&\big(a_{nm} \cos n\varphi + b_{nm} \sin n\varphi\big) \cos \mu_{nm} t \\ &+ \big(c_{nm} \cos n\varphi + d_{nm} \sin n\varphi\big) \sin \mu_{nm} t \Big) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.