ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 19. 06. 2013

---

100. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x|$$

101. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sinh(\alpha x) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

102. Die n-te Partialsumme $s_n(x)$ der Fourier-Reihe einer R-integrierbaren Funktion f ist durch

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt$$

gegeben. Zeigen Sie:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\ dt \tag{1}$$

mit der Funktion

$$D_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\,y)$$

Hinweis: $D_n(x-t)$ besteht aus Ausdrücken der Form $\cos(k\,(x-t))$. Benutzen Sie $\cos(k\,(x-t)) = \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx$ und beachten Sie, dass $\cos kx$ und $\sin kx$ Konstante bezüglich der Integration nach t sind.

103. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 2m\pi$ für alle $m \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\,x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hinweis: Induktion. Oder direkt mit Hilfe von geometrischen Reihen:

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{ix}\right)^k + \left(e^{-ix}\right)^k\right)$$

Die linke Seite lässt sich also als Summe von 2 endlichen geometrischen Reihen darstellen.

104. Zeigen Sie für $x_m = 2m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\, x_m) = \frac{1}{2} + n = \lim_{x \to x_m} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hinweis: d'Hospital.

105. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq m\pi$ für alle $m \in \mathbb{Z}$:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\,x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$$

Hinweis: Siehe Übungsaufgabe 103

106. Die Partialsumme $s_{2n-1}(x)$ der Fourier-Reihe der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist durch

$$s_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right] = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle Nullstellen von $s'_{2n-1}(x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.
Hinweis. $s'_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos((2k-1)\,x)$.

107. Es gelten die Bezeichungen aus Übungsaufgabe 106. Zeigen Sie für $x_n^* = \pi/(2n)$:

$$s_{2n-1}(x_n^*) = \frac{2}{n}\left[\operatorname{sinc}(x_n^*) + \operatorname{sinc}(3x_n^*) + \operatorname{sinc}(5x_n^*) + \ldots + \operatorname{sinc}((2n-1)x_n^*)\right]$$

mit der Funktion $\operatorname{sinc}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

108. Es gelten die Bezeichungen aus Übungsaufgabe 107. Für welche Funktion f, für welche Unterteilung Z des Intervalls $[0, \pi]$ und für welche Wahl ξ von Zwischenpunkten ist

$$\frac{2}{n}\left[\operatorname{sinc}(x_n^*) + \operatorname{sinc}(3x_n^*) + \operatorname{sinc}(5x_n^*) + \ldots + \operatorname{sinc}((2n-1)x_n^*)\right]$$

die dazugehörige Riemann-Summe $S(f, Z, \xi)$? Was erhält man daher für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_{2n}(x_n^*)$.