ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 12. 06. 2013

---

91. Stellen Sie die Hyperbelfunktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ als Potenzreihen dar. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich dieser Potenzreihen.

    Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung dieser Funktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion.

92. Bestätigen Sie die folgende Identität für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$:

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

    Hinweis: $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

93. Stellen Sie die Funktion $\operatorname{arsinh}(x)$ als Potenzreihe dar. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich dieser Potenzreihe.

    Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie bei der Funktion $\arcsin(x)$ vor und betrachten Sie zunächst die abgeleitete Funktion.

94. Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ eine Stammfunktion $F(x)$ in Form einer Potenzreihe.

    Hinweis: Die Taylor-Reihe von $f(x)$ erhält man leicht aus der Taylor-Reihe von e^y für $y = -\frac{1}{2}x^2$. Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ eine Stammfunktion $F(x)$ in Form einer Potenzreihe.

    Hinweis: Die Potenzreihendarstellung von $f(x)$ erhält man leicht aus der Potenzreihendarstellung von e^y für $y = -\frac{1}{2}x^2$.

95. Zeigen Sie: Die Summenfunktion der Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

    erfüllt auf ihrem Konvergenzbereich die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) = 0,$$

    falls die Koeffizienten der Potenzreihe die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \quad \text{für alle } n \geq 2$$

    Hinweis: Einsetzen und Koeffizientenvergleich.

96. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

die Bedingungen aus Übungsaufgabe 95 erfüllen, und bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe.

97. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die n-te Ableitung von $f(x)$ folgende Form hat: Es gibt ein Polynom $p_n(t)$ (vom Grad $3n$) mit

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

Hinweis: Induktion

98. Betrachten Sie folgende Erweiterung $\bar{f}$ der Funktion f aus Übungsaufgabe 97 auf den größeren Definitionsbereich $\mathbb{R}$:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion $\bar{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\bar{f}^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Induktion und

$$\bar{f}^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{f}^{(n)}(h) - \bar{f}^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h} \cdot p_n\left(\frac{1}{h}\right)}{e^{\frac{1}{h^2}}}$$

99. (a) Wie lautet die Taylor-Reihe der Funktion $\bar{f}$ aus Übungsaufgabe 98 um den Punkt $x_0 = 0$? Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe und wie lautet die Summenfunktion?

(b) Zeigen Sie:

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{-2k} \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung von e^y und setzen Sie $y = -\frac{1}{x^2}$.