ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 05. 06. 2013

In allen Übungsaufgaben wird folgende Funktion verwendet:

$$\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

82. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \phi(\varepsilon x)\ dx = \int_a^b 1\ dx = b - a$$

Hinweis: Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\phi_n(x) = \phi(\varepsilon_n x)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1 konvergiert. Berechnen Sie dazu $\|\phi_n - 1\|_\infty$.

83. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x)\, \phi(\varepsilon x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

Hinweis: Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = f(x)\, \phi(\varepsilon_n\, x)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Zeigen Sie dazu: $\|f_n - f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \, \|\phi_n - 1\|_\infty$ und beachten Sie dabei, dass eine Riemann-integrierbare Funktion beschränkt ist, also $\|f\|_\infty < \infty$.

84. Gegeben sei die Funktionenfolge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\delta_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, \phi(nx) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(nx)^2}{2}}.$$

Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\ dx = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^b \delta_n(x)\ dx = 1$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$:

Hinweis: Substitution $u = n\, x$.

85. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 84: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b x \cdot \delta_n(x)\ dx = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^b x^2 \cdot \delta_n(x)\ dx = 0$$

Hinweis: Substitution $u = n\, x$.

86. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 84: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x^k \cdot \delta_n(x)\ dx = 0$$

Hinweis für $k > 2$: $|x^k| \leq C \cdot x^2$ mit $C = \sup\{|x|^{k-2} \colon x \in [a, b]\}$.

87. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 84, für alle Polynomfunktionen p und alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x) \cdot \delta_n(x)\ dx = p(0).$$

Hinweis: $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k\, x^k$.

88. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$. Sei $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 84:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x)\ dx = f(0).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass es eine Folge von Polynomfunktionen p_m gibt, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion f konvergiert.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x)\ dx - f(0) \\
&\quad = \int_a^b [f(x) - p_m(x)] \cdot \delta_n(x)\ dx + \left[\int_a^b p_m(x) \cdot \delta_n(x)\ dx - p_m(0)\right] + [p_m(0) - f(0)]
\end{aligned}$$

Der erste und der dritte Term lassen sich jeweils durch $\|f - p_m\|_\infty$ abschätzen. Ist m hinreichend groß, werden diese Terme beliebig klein.

89. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$. Sei $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 84:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \delta_n'(x)\ dx = -f'(0).$$

Hinweis: Partielle Integration

90. Seien $\omega \in \mathbb{R}$ und $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 84:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \cdot \delta_n(x)\ dx = 1.$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie

$$\left|\int_1^{\infty} e^{-i\omega x} \cdot \delta_n(x)\ dx\right| \leq \int_1^{\infty} \delta_n(x)\ dx \leq \int_1^{\infty} x \cdot \delta_n(x)\ dx \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

und analog $\int_{-\infty}^{-1} e^{-i\omega x} \cdot \delta_n(x)\ dx \to 0$ für $n \to \infty$.