

ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 29. 05. 2013

73. Gegeben sei eine Folge von Funktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = n(1-x)x^n$. Bestimmen Sie die Grenzfunktion f .

74. Berechnen Sie für die Funktionen f_n aus Übungsaufgabe 73 die Supremumsnorm $\|f_n\|_\infty$. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f ?

Hinweis zur Berechnung von $\|f_n\|_\infty$: Berechnen Sie die Extrema von f_n .

75. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$. Zeigen Sie für die Funktionen f_n aus Übungsaufgabe 73, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\infty, X_\varepsilon} = 0$$

mit

$$\|g\|_{\infty, X_\varepsilon} = \sup\{|g(x)| : x \in X_\varepsilon\} \quad \text{und} \quad X_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon]$$

Hinweis: f_n besitzt ein Extremum bei $x_n^* = \frac{n}{n+1}$. Wie groß ist $\|f_n\|_{\infty, X_\varepsilon}$, falls $1 - \varepsilon < x_n^*$?

76. Berechnen Sie für die Funktionen f_n aus Übungsaufgabe 73 die Grenzfunktion g der Folge der ersten Ableitungen f'_n auf der Definitionsmenge $[0, 1)$. Was passiert im Punkt $x = 1$?

77. Berechnen Sie für die Funktionen f_n aus Übungsaufgabe 73 die Supremumsnorm $\|f'_n\|_\infty$ der ersten Ableitungen auf der Definitionsmenge $[0, 1)$. Konvergiert die Funktionenfolge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf der Definitionsmenge $[0, 1)$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion g ?

Hinweis zur Berechnung von $\|f'_n\|_\infty$: Berechnen Sie die Extrema von f'_n .

78. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$. Zeigen Sie für die Funktionen f_n aus Übungsaufgabe 73, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f'_n\|_{\infty, X_\varepsilon} = 0$$

Hinweis: f'_n besitzt ein Extremum bei $x_n^{**} = \frac{n-1}{n+1}$. Wie groß ist $\|f'_n\|_{\infty, X_\varepsilon}$, falls $1 - \varepsilon < x_n^{**}$?

79. Überprüfen Sie, ob für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 73 folgende Aussage für alle $x_0 \in [0, 1]$ richtig ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

80. Überprüfen Sie, ob für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 73 folgende Aussage richtig ist:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1)$$

81. Überprüfen Sie, ob für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 73 folgende Aussagen richtig sind:

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx$$

und

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) \, dx$$

mit $g_n(x) = n \cdot f_n(x)$.