**ÜBUNGEN ZU**

**ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 15. 05. 2013

---

55. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

konvergiert.

56. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1}$$

konvergiert.

57. Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

mit Gliedern der Form

$$a_k = b_k - b_{k-1},$$

heißt eine Teleskopreihe. Zeigen Sie: Eine Teleskopreihe konvergiert genau dann, wenn die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert. Im Falle der Konvergenz erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} b_n - b_0.$$

Hinweis: Zeigen Sie für die $n$-te Partialsumme $s_n$ einer Teleskopreihe: $s_n = b_n - b_0$.

58. Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Hinweis: Stellen Sie diese Reihe als Teleskopreihe dar. Berechnen Sie dazu eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}.$$

59. Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsummen und berücksichtigen Sie die Identität

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)}.$$

60. Seien $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$ und $k \in \mathbb{N}$. Der Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!}$$

Zusätzlich vereinbart man: $\binom{\alpha}{0} = 1$.

(a) Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n < k$:

$$\binom{n}{k} = 0.$$

(b) Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

61. Zeigen Sie:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}.$$

62. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$: Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

konvergiert.

63. Zeigen Sie:

(a) Für $\boxed{\alpha \in \mathbb{N}}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^{\alpha}.$$

Hinweis: $\binom{\alpha}{k} =?$ für $k > \alpha$.

(b) Für $\boxed{\alpha = -1}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha.$$

Hinweis: $\binom{-1}{k}$ =?.