ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 08. 05. 2013

---

46. Sei $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ und sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$. Zeigen Sie:

$$q^n \leq \left(\frac{i \cdot q}{1-q}\right)^i \cdot \frac{1}{n^i}$$

Hinweis: Finden Sie zu q ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$q = \frac{1}{1+x}$$

und verwenden Sie anschließend die Abschätzung aus Übungsbeispiel 45.

47. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$ und $0 < q < 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = n^p \cdot q^n.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung aus Übungsbeispiel 46 für ein $i \in \mathbb{N}$ mit $p < i$.

48. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p < 0$ und $q > 1$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit

$$a_n = n^p \cdot q^n.$$

unbeschränkt ist.

Hinweis: $a_n = 1/\left(n^{\widetilde{p}} \cdot \widetilde{q}^n\right)$ mit $\widetilde{p} = -p$ und $\widetilde{q} = 1/q$.

49. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert.

50. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert.

Hinweis: Verdichtungskriterium.

51. Untersuchen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ die so genannte Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert.

Hinweis: Verdichtungskriterium.

Anmerkung: Für jene s, für die die Dirichlet-Reihe konvergiert, stimmt ihr Grenzwert mit dem Wert der Riemannschen ζ-Funktion überein:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

52. Untersuchen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert. Für jene s, für die diese Reihe konvergiert, stimmt ihr Grenzwert mit dem Wert der Dirichletschen η-Funktion überein:

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s}.$$

Hinweis: Leibniz-Kriterium

53. Zeigen Sie für jene $s \in \mathbb{R}$, für die die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s}$$

konvergieren, dass mit den Notationen der Übungsaufgaben 51 und 52 gilt:

$$\zeta(s) - \eta(s) = \frac{2}{2^s} \zeta(s).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Differenz der Partialsummen der beiden obigen Reihen für eine gerade Anzahl $n = 2k$ von Summanden.

54. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

konvergiert.