

**ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 24. 04. 2013

37. Zeigen Sie mit Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

38. Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $a, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $(x_0)^k \geq a$. Zeigen Sie für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die durch

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k \cdot (x_n)^{k-1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x_n)^k \geq a \quad \text{und} \quad x_{n+1} \leq x_n$$

Hinweis zur ersten Ungleichung: Induktion,

$$x_{n+1} = x_n \left[1 + \frac{a - (x_n)^k}{k \cdot (x_n)^k} \right]$$

Bernoullische Ungleichung.

Hinweis zur zweiten Ungleichung: folgt direkt aus der ersten Ungleichung.

39. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass die obige Ungleichung zu folgender Ungleichung äquivalent ist:

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Wenden Sie zum Nachweis dieser Ungleichung zunächst die Bernoullische Ungleichung für den Ausdruck auf der linken Seite an, der sich leicht auf die Form $(1+x)^n$ bringen lässt.

40. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass die obige Ungleichung für $n > 1$ zu folgender Ungleichung äquivalent ist:

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

Wenden Sie zum Nachweis dieser Ungleichung zunächst die Bernoullische Ungleichung für den Ausdruck auf der linken Seite an, der sich leicht auf die Form $(1+x)^n$ bringen lässt.

41. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

streng monoton fallend ist.

Hinweis: Vergleichen Sie die Ungleichung $a_n < a_{n-1}$ mit der Ungleichung aus Übungsaufgabe 40.

42. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung $a_n \leq a_1$, die leicht aus Übungsaufgabe 41 folgt.

43. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Hinweis: Beachten Sie Monotonieeigenschaften der unteren und der oberen Schranke. Zum Grenzwert der oberen Schranke:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

44. Seien $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$. Zeigen Sie:

$$\binom{n}{i} \geq \left(\frac{n}{i}\right)^i.$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass sich die obige Ungleichung zu folgender Ungleichung äquivalent ist:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n-i+1}{n}\right) \geq \left(\frac{i-1}{i}\right) \cdot \left(\frac{i-2}{i}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{i}\right)$$

Zum Nachweis dieser Ungleichung vergleichen Sie die beiden ersten Faktoren, die beiden zweiten Faktoren, ...

45. Sei $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ und sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Zeigen Sie:

$$(1+x)^n \geq \binom{n}{i} x^i \geq \left(\frac{x}{i}\right)^i \cdot n^i$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz und Übungsaufgabe 44