ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 17. 04. 2013

---

28. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\ dx.$$

29. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x+x^2)^2}\ dx.$$

30. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\ dx.$$

31. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{3+\sin x}\ dx.$$

32. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der rationalen Funktion

$$R(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

33. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei C die positiv orientierte Randkurve von $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| \leq r\}$. Zeigen Sie:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\ dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\ dt.$$

34. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei C die positiv orientierte Randkurve von $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| \leq r\}$. Zeigen Sie:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\ dt.$$

Hinweis: Cauchysche Integralformel

35. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ sei C^* die positiv orientierte Randkurve von $K_r(x_0, y_0) = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon \|(x - x_0, y - y_0)^T\| \leq r\}$. Zeigen Sie:

$$\int_{C^*} u(x, y)\ ds = r \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\ dt.$$

36. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und seien die Funktionen $u\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $v\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) \quad \text{für } z = x + i\, y.$$

gegeben. Für $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$ sei C^* die positiv orientierte Randkurve von $K_r(x_0, y_0) = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon \|(x - x_0, y - y_0)^T\| \leq r\}$. Zeigen Sie:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C^*} u(x, y)\ ds \quad \text{und} \quad v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C^*} v(x, y)\ ds.$$

Hinweis: Vergleichen Sie Realteil und Imaginärteil der Identität aus Übungsaufgabe 34 und verwenden Sie anschließend Übungsaufgabe 35.