

ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 10. 04. 2013

19. Die komplexe Exponentialfunktion e^z wurde in der Vorlesung folgendermaßen eingeführt:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{für } z = x + iy.$$

Diese Funktion lässt sich auch als Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 interpretieren. Stellen Sie diese Funktion auf und überprüfen Sie, ob die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Ist die komplexe Exponentialfunktion holomorph? Wenn ja, wie lautet die Ableitung?

20. Stellen Sie die komplexe Sinusfunktion $\sin z$ in der Form

$$\sin z = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{mit } z = x + iy$$

und geeigneten Funktionen $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dar.

21. Zeigen Sie für die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion:

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

22. Die beiden komplexen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ und $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = |z|^2$ stimmen für reelle Argumente mit der reellen Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ überein. Überprüfen Sie, für welche Argumente $z \in \mathbb{C}$ die komplexen Funktionen f und g komplex differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweilige Ableitung.

23. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in U . Zeigen Sie: Die (Produkt-)Funktion $f g$ ist holomorph in U und es gilt:

$$(f(z) g(z))' = f'(z) g(z) + f(z) g'(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

24. Bestimmen Sie durch direkte Verwendung der Definition des komplexen Kurvenintegrals den Wert von

$$\int_C e^z dz$$

entlang der Kurve C , die vom Ursprung 0 zu einem Punkt $w \in \mathbb{C}$ entlang einer Geraden führt.

25. Gegeben sei die komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \bar{z}$. Ist das komplexe Kurvenintegral

$$\int_C f(z) dz$$

wegunabhängig?

26. Untersuchen Sie für die Funktion f aus Übungsaufgabe 25, ob das Kurvenintegral

$$\int_{C^*} u(x, y) dx + v(x, y) dy$$

wegunabhängig ist, wobei die Funktionen $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{für } z = x + i y.$$

gegeben sind.

27. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in U . Zeigen Sie für alle $a, b \in U$:

$$\int_a^b f'(z) g(z) dz = f(z) g(z) \Big|_a^b - \int_a^b f(z) g'(z) dz.$$