ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 13. 03. 2013

---

1. Sei C die Kurve mit der Parametrisierung $\gamma\colon [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)^T$. Zeigen Sie, dass die Punkte $(x,y)^T = \gamma(t)$ dieser Kurve auf der Hyperbel
$$x^2 - y^2 = 1$$
liegen. Stellen Sie die Kurve C grafisch dar.

2. Berechnen Sie für die Kurve C aus Übungsbeispiel 1
$$\int_C (-y\ dx + x\ dy).$$

3. Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve C aus Übungsbeispiel 1 sind durch
$$\gamma_A = (\cosh a, -\sinh a)^T, \quad \gamma_E = (\cosh a, \sinh a)^T$$
gegeben. Sei C_A die Gerade zwischen dem Ursprung $(0,0)^T$ und γ_A und sei C_E die Gerade zwischen γ_E und dem Ursprung $(0,0)^T$. Die geschlossene Kurve $C_1 = C_A + C + C_E$ umschließt den Bereich B. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel
$$|B| = \frac{1}{2} \int_{C_1} (-y\ dx + x\ dy)$$
den Flächeninhalt von B.

Für die Übungsaufgaben 4 - 9 gelte: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Bereich, für den der Gaußsche Integralsatz gilt, also:
$$\int_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \right)\ dx = \int_{\partial B} f(x) \cdot n(x)\ ds,$$
wobei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen Menge X mit $B \subset X \subset \mathbb{R}^2$ ist, und ∂B die Menge der Randpunkte (genauer die Randkurve) von B bezeichnet.

---

4. Zeigen Sie folgende Formel für stetig differenzierbare Skalarfelder $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und stetig differenzierbares Vektorfeldfelder $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^2$:
$$\int_B \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix} \cdot g(x)\ dx = \int_{\partial B} f(x)\, g(x) \cdot t(x)\ ds + \int_B f(x) \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right)\ dx$$
mit
$$t(x) = \begin{pmatrix} n_2(x) \\ -n_1(x) \end{pmatrix}$$
Hinweis: Partielle Integration

5. Zeigen Sie folgende Formel für stetig differenzierbare Vektorfelder $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und und stetig differenzierbare Skalarfelder $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_B g(x)\ \mathrm{div}\, f(x)\ dx = \int_{\partial B} g(x)\, f(x) \cdot n(x)\ ds - \int_B f(x) \cdot \mathrm{grad}\, g(x)\ dx.$$

6. Zeigen Sie folgende Formel (1. Greensche Identität) für zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und einmal stetig differenzierbare Skalarfelder $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_B g(x)\, \Delta f(x)\ dx = \int_{\partial B} g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x)\ ds - \int_B \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\ dx$$

Hinweis: Übungsaufgabe 5 mit ∇f anstelle von f.

7. Zeigen Sie folgende Formel (2. Greensche Identität) für zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_B \Big(g(x)\, \Delta f(x) - f(x)\, \Delta g(x) \Big)\ dx = \int_{\partial B} \left(g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x) - f(x)\, \frac{\partial g}{\partial n}(x) \right)\ ds$$

Hinweis: Vertauschen Sie f und g in Übungsaufgabe 6.

8. Seien $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon \partial B \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Angenommen, die Funktion $u\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in B$$

und die Randbedingung

$$u(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial B.$$

Zeigen Sie

$$\int_B \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ dx = \int_B f(x) v(x)\ dx$$

für alle stetig differenzierbare Funktionen $v\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $v(x) = 0$ für alle $x \in \partial B$.

Hinweis: 1. Greensche Identität.

9. Seien $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon \partial B \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Angenommen, die Funktion $u\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in B$$

und die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial B.$$

Zeigen Sie

$$\int_B \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ dx = \int_B f(x) v(x)\ dx + \int_{\partial B} g(x) v(x)\ ds$$

für alle stetig differenzierbare Funktionen $v\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Hinweis: 1. Greensche Identität.