ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 30. 1. 2013

---

100. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ -2x_1x_2 \end{pmatrix},$$

die Jacobi-Matrix $f'(x)$ und untersuchen Sie, ob $f'(x)$ symmetrisch ist.

101. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aus der Übungsaufgabe 100 ein Skalarfeld $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\phi(x) = f(x)$.

102. Ist das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 96 (als Funktion auf dem Definitionsbereich $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$) konservativ? Ist das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 96 als Funktion auf dem kleineren Definitionsbereich

$$\tilde{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0)^T \colon x_1 \leq 0\}$$

konservativ?

Hinweis: Beachten Sie für die erste Frage das Ergebnis der Übungsaufgabe 96. Untersuchen Sie für die zweite Frage, ob $\tilde{X}$ sternförmig ist.

103. Es gelten die Bezeichnungen aus Übungsaufgabe 99. Durch

$$\phi(x) = \int_{C_x} f(y) \cdot dy$$

ist ein Skalarfeld $\phi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der Definitionsmenge $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ gegeben. Warum gilt $\operatorname{grad}\phi(x) = f(x)$ für alle $x \in \tilde{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0)^T \colon x_1 \leq 0\}$?

Hinweis: Nicht nachrechnen sondern nachdenken.

104. Berechnen Sie

$$\int_B (1-x)(1-y)\; d(x,y)$$

für das Quadrat $B = [0,1] \times [0,1]$.

105. Berechnen Sie

$$\int_B (1-x-y)\; d(x,y)$$

für das Dreieck $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

106. Berechnen Sie

$$\int_B x \; d(x,y)$$

für die Menge $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1 - y^2\}$, die durch die y-Achse und die Parabel $x = 1 - y^2$ begrenzt ist.

107. Berechnen Sie

$$\int_B xy \; d(x,y)$$

für den Viertelkreis $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

108. Berechnen Sie den Flächeninhalt jener Menge, die durch die Spirale aus Übungsaufgabe 93 und dem Intervall $[0, 2\pi]$ auf der x-Achse umschlossen wird.