ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 23. 1. 2013

---

91. Alle Punkte (x, y) mit
$$x^2 - y^2 = 1$$
bilden eine Hyperbel. Finden Sie eine parametrisierte Kurve, die jenen Teil der Hyperbel, der rechts von der y-Achse liegt, als Bildmenge besitzt.

92. Sei C eine Kurve, die in Polarform gegeben ist, d.h.: sie besitzt eine Parametrisierung $\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der Form $\gamma(\varphi) = (r(\varphi)\,\cos\varphi, r(\varphi)\,\sin\varphi)^T$. Bestätigen Sie die folgende Formel für die Bogenlänge:
$$|C| = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\; d\varphi$$

93. Die Kurve C ist durch die Parametrisierung $\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t\,\cos t, t\,\sin t)^T$ gegeben. (Die Bildmenge ist Spirale.) Berechnen Sie
$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\; ds.$$

94. Bestimmen Sie für die Kurve C mit der Parametrisierung $\gamma\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (t - \sin t, -1 + \cos t)^T$ das Kurvenintegral
$$\int_C f(x, y)\; ds$$
für die beiden Funktionen
$$f(x, y) = 1 \quad \text{und} \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-2gy}}$$
mit $g = 9,81$.

Hinweis: $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$.

95. Sei C jene Kurve in $\mathbb{R}^2$, die den Anfangspunkt $(0, 0)^T$ mit dem Endpunkt $(\pi, -2)^T$ linear (d.h. durch ein Geradenstück) verbindet. Berechnen Sie
$$\int_C f(x, y)\; ds$$
für die beiden Funktionen
$$f(x, y) = 1 \quad \text{und} \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-2gy}}$$
mit $g = 9,81$.

96. Bestimmen Sie für das Vektorfeld $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ mit $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

das Kurvenintegral $\int_C f(x) \cdot dx$ entlang des Kreises C mit der Parametrisierung $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

97. Berechnen Sie für das Vektorfeld f aus dem Übungsbeispiel 96 die Jacobi-Matrix $f'(x)$ und untersuchen Sie, ob $f'(x)$ symmetrisch ist.

98. Sei $x = (x_1, x_2)^T$ ein beliebiger Punkt in $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$. Dieser Punkt besitzt eine eindeutige Darstellung in Polarkoordinaten: $x_1 = r\cos\varphi$ und $x_2 = r\sin\varphi$ mit $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Die Kurve C_1 ist durch $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (\cos(t\varphi), \sin(t\varphi))^T$ gegeben. Die Kurve C_2 ist durch $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_2(t) = ((1+t(r-1))\cos\varphi, (1+t(r-1))\sin\varphi)^T$ gegeben. Die Kurve $C_x = C_1 + C_2$ verbindet den Anfangspunkt $(1,0)^T$ mit dem Endpunkt $x = (x_1, x_2)^T$. Stellen Sie diese Kurve grafisch dar.

99. Berechnen Sie für das Vektorfeld f aus Übungsaufgabe 96 das Kurvenintegral

$$\int_{C_x} f(y) \cdot dy$$

entlang der Kurve C_x, die in Übungsaufgabe 98 definiert wurde.