ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 16. 1. 2013

---

82. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Variablen die kartesischen Koordinaten x, y und z sind. Durch eine Transformation in Zylinderkoordinaten erhält man die Funktion $g\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(r,\varphi,z) = f(T(r,\varphi,z))$$

mit $T(r,\varphi,z)$ aus Übungsaufgabe 78. Stellen Sie analog zur Vorlesung, in der die Transformation in Polarkoordinaten diskutiert wurde, den Laplace-Operator von f $\Delta_{(x,y,z)}f$ in Zylinderkoordinaten dar.

83. Der Zusammenhang zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten in $\mathbb{R}^3$ wird durch die Abbildung $T\colon [0,\infty) \times [0,\pi] \times (-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\sin\theta\cos\varphi \\ r\,\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

beschrieben.

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $T'(r,\theta,\varphi)$, die Determinante $\det T'(r,\theta,\varphi)$ und die Inverse $T'(r,\theta,\varphi)^{-1}$ dieser Abbildung.

84. Zeigen Sie für die Funktionen $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x,y) = e^x\,\cos y$ und $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x,y) = e^x\,\sin y$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

und

$$\Delta f_1(x,y) = 0, \quad \Delta f_2(x,y) = 0,$$

wobei Δ den Laplace-Operator bezeichnet.

85. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ein zweimal differenzierbares Skalarfeld. Stellen Sie

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(x) \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f(x)$$

mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung von f dar.

86. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal differenzierbares Vektorfeld. Stellen Sie

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} f(x) \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} f(x)$$

mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Komponentenfunktionen f_i von f dar.

87. Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^x \cos y$ das Taylor-Polynom vom Grad 2, also

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T H_f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$.

88. Bestimmen Sie für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = -x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1$ alle Punkte (x,y) mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 0.$$

Berechnen Sie für jeden dieser Punkte die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ und überprüfen Sie, ob diese Matrix positiv definit oder negativ definit ist.

89. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x+y)\, e^{-x^2-y^2}$ jeweils für $(x,y) = (1,0)$, $(x,y) = (0,1)$, $(x,y) = (-1,0)$ und $(x,y) = (0,-1)$.

90. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x+y)\, e^{-x^2-y^2}$.