ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 9. 1. 2013

---

73. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ von $f(x, y, z) = x^2 \sin(x\,z) + y^2$.

74. Berechnen Sie die Ableitung (totale Ableitung, Fréchet-Ableitung, Jacobi-Matrix) $f'(x, y)$ der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

75. Seien $\gamma \in \mathbb{R}$ eine gegebene konstante Zahl und $c \in \mathbb{R}^3$ ein gegebener konstanter Vektor. Die drei Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sind durch

$$f(x) = \gamma\, x, \quad g(x) = c \cdot x, \quad h(x) = c \times x$$

gegeben. Berechnen Sie direkt (d.h.: ohne Verwendung von Produktregeln aus dem Skriptum): $f'(x)$, $\nabla \cdot f(x)$, $\nabla \times f(x)$, $g'(x)$, $\nabla g(x)$, $h'(x)$, $\nabla \cdot h(x)$ und $\nabla \times h(x)$.

76. Das Produkt zweier Funktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lässt sich auch als Hintereinanderausführung der Funktionen $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(y) = y_1 \cdot y_2 \quad \text{für} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

darstellen:

$$f(x) \cdot g(x) = h(F(x)).$$

Verwenden Sie die Kettenregel, um die Ableitung von $h(F(x))$ darzustellen und bestätigen Sie damit die Produktregel. Wie lässt sich auf ähnliche Weise die Quotientenregel mit Hilfe der Kettenregel bestätigen?

77. Seien $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ vorgegeben. Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ für die Richtung $v = n$ und für die Richtung $v = t$ mit

$$n = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

78. Der Zusammenhang zwischen Zylinderkoordinaten und kartesischen Koordinaten in $\mathbb{R}^3$ wird durch die Abbildung $T\colon [0,\infty)\times(-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix},$$

beschrieben.

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $T'(r,\varphi,z)$ dieser Abbildung.

79. Berechnen Sie die Inverse der Jacobi-Matrix $T'(r,\varphi,z)$ aus Übungsaufgabe 78.

Hinweis: Die Inverse A^{-1} einer 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

erhält man z.B. mit Hilfe der folgenden Formel:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $\det A$ von A, gegeben durch

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

80. Sei $f\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion, deren Variablen die kartesischen Koordinaten x, y und z sind. Durch eine Transformation in Zylinderkoordinaten erhält man die Funktion $g\colon[0,\infty)\times(-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(r,\varphi,z) = f(T(r,\varphi,z))$$

mit $T(r,\varphi,z)$ aus Übungsaufgabe 78. Stellen Sie analog zur Vorlesung, in der die Transformation in Polarkoordinaten diskutiert wurde, den Gradienten $\nabla_{(x,y,z)}f$ mit Hilfe des Gradienten $\nabla_{(r,\varphi,z)}g$ dar. Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial g}{\partial z}$ dar.

Hinweis: Starten Sie mit der Kettenregel.

81. Sei $F\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ eine Funktion, deren Variablen die kartesischen Koordinaten x, y und z sind. Durch eine Transformation in Zylinderkoordinaten erhält man die Funktion $G\colon[0,\infty)\times(-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$G(r,\varphi,z) = F(T(r,\varphi,z))$$

mit $T(r,\varphi,z)$ aus Übungsaufgabe 78. Zeigen Sie:

$$\nabla_{(x,y,z)}\cdot F(x,y,z) = \frac{1}{r}\nabla_{(r,\varphi,z)}\cdot\left[rT'(r,\varphi,z)^{-1}G(r,\varphi,z)\right]$$

mit $(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$.