ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 12. 12. 2012

---

64. Bestimmen Sie (mit Hilfe der Rechenregeln in $\mathbb{C}$) für die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{(2+3i)^2 - (-7+9i)}{(1-i)\cdot(3+i)} \quad \text{und} \quad z_2 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 + \frac{3-i}{1+3i}$$

jeweils den Realteil und den Imaginärteil.

65. Zeigen Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

und für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

66. Finden Sie alle Lösungen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, sodass

$$z^2 = -2i$$

Hinweis: In der Vorlesung wurde die Gleichung $z^2 = -1$ diskutiert. Gehen Sie analog vor.

67. Zeigen Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

68. Angenommen, die komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ liegen in Polarform vor:

$$z_1 = r_1\, e^{i\,\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2\, e^{i\,\varphi_2}.$$

Zeigen Sie die folgenden Polarformen für das Produkt und den Quotienten der beiden Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = r_1 \cdot r_2 \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

und, falls $z_2 \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = r\, e^{i\,\varphi} \quad \text{mit} \quad r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

69. Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = -2.$$

Hinweis: In der Vorlesung wurden die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$ mit Hilfe der Polarform berechnet. Gehen Sie analog vor.

70. Überprüfen Sie, ob die für $z \in \mathbb{R}$ bekannte Identität

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

auch für alle $z \in \mathbb{C}$ gültig bleibt.

71. Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \cosh(iz).$$

Stellen Sie einen ähnlichen Zusammenhang zwischen sin und sinh auf.

72. (a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i\ \sin(nx)$$

Hinweis: Formulieren Sie die Identität mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion und beachten Sie die Rechenregel aus Übungsaufgabe 67.

(b) Verwenden Sie anschließend diese Identität für $n = 3$, um $\sin(3x)$ als einen (polynomialen) Ausdruck von $\sin x$ und $\cos x$ darzustellen.

Hinweis: Die Imaginärteile der beiden Seiten der Identität müssen gleich sein. Berechnen Sie den Imaginärteil der linken Seite durch Ausmultiplizieren.