ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 28. 11. 2012

---

46. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -|x|^\alpha & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie für $\alpha \neq -1$ und $x \neq 0$:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{1}{\alpha+1}\,|x|^{\alpha+1}.$$

47. Berechnen Sie für jene $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, für die das möglich ist, das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

der Funktion $f(x)$ aus Beispiel 46.

48. Berechnen Sie für jene $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, für die das möglich ist, das Integral

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

der Funktion $f(x)$ aus Beispiel 46.

49. Was lässt sich im Fall $\alpha = -1$ über die Integrale

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

für die Funktion $f(x)$ aus Beispiel 46 aussagen?

50. Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.$$

Was lässt sich über

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$$

aussagen?

51. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Zeigen Sie auf ähnliche Weise:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 2\sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

Aus welcher Rechenregel der Gamma-Funktion folgt daraus sofort die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx?$$

52. Seien μ und σ zwei gegebene reelle Zahlen mit $\sigma > 0$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

gegeben. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Zeigen Sie auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx &= \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\ &= \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \mu \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\end{aligned}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

53. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y^2.$$

54. Finden Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$x \cdot y' - y^2 = 0.$$