ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 07. 11. 2012

---

19. Seien μ und σ zwei gegebene reelle Zahlen mit $\sigma > 0$. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

20. Zeigen Sie: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei 4-mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''''(x_0) > 0.$$

Dann ist x_0 ein lokales Minimum.

Hinweis: Untersuchen Sie das Vorzeichen des Restgliedes $R_3(x)$ in der Nähe von x_0.

21. Zeigen Sie: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei 3-mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0.$$

Dann ist x_0 kein lokales Extremum.

Hinweis: Untersuchen Sie das Vorzeichen des Restgliedes $R_2(x)$ links und rechts von x_0.

22. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = 5x^4 - 6x^5.$$

Bestimmen Sie den kleinsten Wert und den größten Wert von $f(x)$ für $x \in [0, 1]$.

23. Untersuchen Sie, in welchen Teilintervallen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot e^{-x}$$

(streng) monoton wachsend oder fallend ist.

24. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_3(x)$ der Funktion $\cot x$ für $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: $(\cot x)' = -1 - \cot^2 x$.

25. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für die Funktion $\sinh x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie für das Restglied:
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$
Hinweis: Zeigen Sie $|\sinh(\theta x)| = \sinh|\theta x| \leq \sinh(|x|)$ und eine analoge Abschätzung für $|\cosh(\theta x)|$.

26. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für das Taylor-Polynom $T_{2k-1}(x)$ der Funktion $\cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$:
$$|\cos x - T_{2k-1}(x)| \leq \frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \quad \text{für alle } x \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$
Geben Sie ein möglichst kleines $k \in \mathbb{N}$ an, sodass der Unterschied zwischen $\cos x$ und $T_{2k-1}(x)$ für alle $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ nicht größer als 0.001 ist.

27. Sei α eine positive reelle Zahl. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe für die Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1+x)^\alpha$ an der Stelle $x_0 = 0$.