ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)

für den 24. 10. 2012

---

10. Zeigen Sie für alle x aus dem Definitionsbereich von artanh:

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Hinweis: Stellen Sie die Funktionsgleichung $y = \tanh x$ mit Hilfe von Exponentialfunktionen dar und vertauschen Sie für die Umkehrfunktion x und y.

11. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Hinweis: Verwenden Sie direkt die Definition der Hyperbelfunktionen.

12. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh(4x) = 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1.$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$g(t) = \cosh(4 \operatorname{arcosh} t)$$

sinnvoll definiert? Zeigen Sie, dass die Funktion $g(t)$ auf diesem Definitionsbereich mit dem Polynom 4. Grades aus Übungsaufgabe 9 übereinstimmt.

13. Zeigen Sie die Summenregel: Seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f und g sind in x_0 differenzierbar. Dann gilt: $f + g$ ist ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

14. Sei $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, g ist in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\frac{1}{g}$ ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{1}{g} \right)' (x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Hinweis: $\frac{1}{g} = h \circ g$ mit der reellen Funktion $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(y) = \frac{1}{y}$.

15. Zeigen Sie die Quotientenregel: Seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f und g sind in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann gilt: $\frac{f}{g}$ ist ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Hinweis: Wenden Sie die Produktregel und die Regel aus Übungsaufgabe 14 auf $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ an.

16. Seien $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)^{g(x)}$ ebenfalls differenzierbar ist und geben Sie eine Formel für die Ableitung von h an.

17. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

    (a) $f(x) = x^2 \cdot \cot(2x) + \ln|x|$

    (b) $f(x) = x^x$ mit $x > 0$

18. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

    (a) $f(x) = \operatorname{arcoth} x$

    (b) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ mit $x > 0$