**ÜBUNGEN ZU**

**ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN)**

für den 17. 10. 2012

---

1. Zeigen Sie für alle $x \in [0, \infty)$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$:
$$\sqrt[m\cdot n]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}.$$

2. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Zeigen Sie:
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$
Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung der Reihe nach zunächst für Exponenten aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

3. Seien $a, b \in (0, \infty)$. Zeigen Sie für alle $x, y \in (0, \infty)$:
$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x.$$

4. Stellen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die durch die Funktionsgleichung
$$y = x^2 + x - 1$$
gegeben ist, grafisch dar. Bestimmen Sie einen geeigneten Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}$ und einen geeigneten Wertebereich $Y \subset \mathbb{R}$, sodass $f\colon X \longrightarrow Y$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

5. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$
Hinweis: Beginnen Sie mit dem Additionstheorem für $\cos(4x) = \cos(2x + 2x)$.

6. Zeigen Sie für alle $t \in [-1, 1]$:
$$\sin(\arccos t) = \sqrt{1 - t^2}$$
Hinweis: Verwenden Sie die Identität $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und stellen Sie damit $\sin x$ mit Hilfe von $\cos x$ dar. Wählen Sie anschließend $x = \arccos t$.

7. Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
Hinweis: Beginnen Sie mit dem Additionstheorem für $\sin x = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right)$ .

8. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots\}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{mit} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Additionstheorem für $\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$.

9. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(t) = \cos(4 \arccos t)$$

sinvoll definiert? Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t)$ auf diesem Definitionsbereich mit einem Polynom vom Grad 4 übereinstimmt.

Hinweis zum zweiten Teil: Verwenden Sie Übungsaufgabe 5 für $x = \arccos t$.