Skriptum zur Vorlesung
Analysis für Physiker(innen) I und II

Walter Zulehner
Institut für Numerische Mathematik
Johannes Kepler Universität Linz

2012/13

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Darstellung der Analysis in dieser Lehrveranstaltung orientiert sich sehr stark an den Büchern

- Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1, 17. Auflage*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009

- Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2, 14. Auflage*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008

und an

- Heinz Engl, *Skriptum Analysis*, überarbeitet und ergänzt von Andreas Neubauer, Institut für Industriemathematik, Johannes Kepler Universität Linz

In den Kapiteln 1 - 8 werden intuitiv einsichtige Argumentationen zugelassen, insbesonders im Zusammenhang mit Winkelfunktionen und dem Begriff Grenzwert, auch wenn sie noch nicht den üblichen Anforderungen an mathematischer Strenge genügen.

Beginnend mit Kapitel 9 werden formal strengere Ansprüche an die Beweisführungen gestellt. Eine Ausnahme bildet der Großteil von Kapitel 13, in dem das kalkülhafte Anwenden der Transformationen im Vordergrund steht.

Kapitel 1

Reelle Funktionen

1.1 Die Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

- Operationen: $x, y \in \mathbb{R}$: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y = x/y = \dfrac{x}{y}$, falls $y \neq 0$.
- Ordnungsrelationen: $x \leq y$, $x < y$, $x \geq y$, $x > y$.
- Betrag $|x|$ und Abstand $|x - y|$.

Wichtige Teilmengen:

- Die Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Die Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Die Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$

1.2 Der mathematische Funktionsbegriff

Jedem Element $x \in X$ wird genau ein Element $y \in Y$ zugeordnet. Schreibweise:

$$\begin{array}{rcl} f\colon X & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

oder in Form einer Funktionsgleichung

$$y = f(x).$$

X Definitionsbereich, Y Wertebereich.

- $X, Y \subset \mathbb{R}$: reelle Funktion. Meist ist X ein Intervall ((a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$) oder eine Vereinigung von Intervallen, und $Y = \mathbb{R}$.

- Grafische Darstellung: Graph einer Funktion
- Bild einer Menge $A \subset X$, Urbild einer Menge $B \subset Y$:

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

1.3 Operationen für Funktionen

- $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon X \longrightarrow Y$, $c \in \mathbb{R}$: $f+g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (c \cdot f)(x) = c \cdot f(x),\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Komposition, Hintereinanderausführung:
  $g\colon X \longrightarrow Y$, $f\colon Y \longrightarrow Z$: $f \circ g\colon X \longrightarrow Z$ mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt
  - injektiv, wenn verschiedene Urbilder verschiedene Bilder haben:

    $$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

  - surjektiv, wenn jedes Element $y \in Y$ Bild eines Elements $x \in X$ ist:

    $$Y = f(X)$$

  - bijektiv, wenn die Funktion injektiv und surjektiv ist.

  Falls $f\colon X \longrightarrow Y$ bijektiv ist, gibt es die Umkehrfunktion (inverse Funktion) $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ mit der Funktionsgleichung

  $$x = f(y).$$

  Es gilt:

  $$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{für alle } x \in X \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{für alle } y \in Y$$

- Jede Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ ist surjektiv, wenn man als Bildbereich $f(X)$ wählt. Die Einschränkung einer Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ auf eine Teilmenge $A \subset X$ bezeichnet man mit $f\big|_A$.

1.4 Beispiele einfacher Funktionen

- Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten:

  Definition 1.1 (siehe Abbildung 1.1 und Abbildung 1.2)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$:*

  – $f(x) = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \ mal} = x^n, \ X = \mathbb{R}$

  – $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}, \ X = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

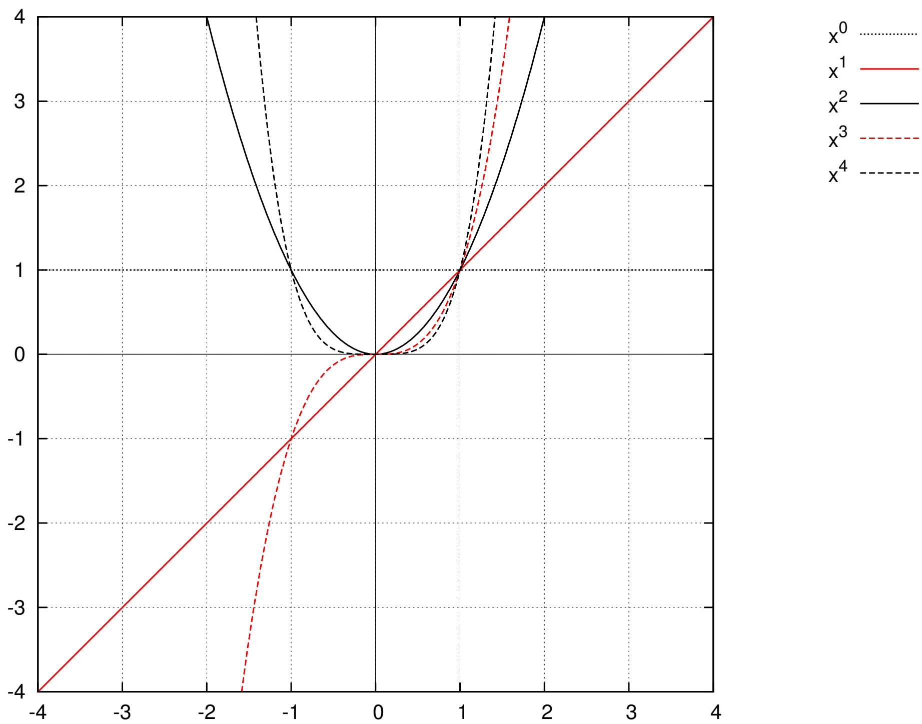

Abbildung 1.1: Potenzfunktionen für positive ganzzahlige Exponenten

Rechenregeln:

Satz 1.1. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\boxed{x^m \cdot x^n = x^{m+n}} \qquad \boxed{(x^m)^n = x^{m \cdot n}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n}$$

Beweis für die dritte Rechenregel. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}(x \cdot y)^n &= \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{n \text{ mal}} \\ &= \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ mal}} = x^n \cdot y^n\end{aligned}$$

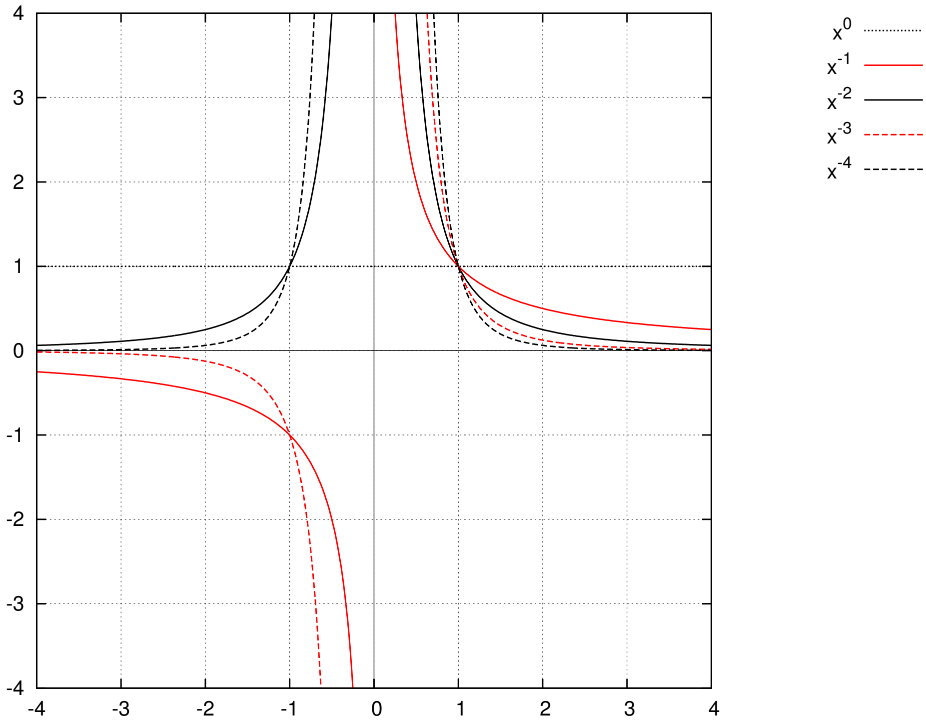

Abbildung 1.2: Potenzfunktionen für negative ganzzahlige Exponenten

Analog lassen sich die beiden anderen Rechenregeln zeigen. $\square$

Satz 1.2. *Für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:*

$$\boxed{(x^m)^n = x^{m \cdot n}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n}$$

und, falls zusätzlich $m + n \neq 0$:

$$\boxed{x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$$

Beweis für die zweite Rechenregel für den Fall $n < 0$. Mit $n = -|n|$ und $|n| > 0$ gilt:

$$(x \cdot y)^n = (x \cdot y)^{-|n|} = \frac{1}{(x \cdot y)^{|n|}} = \frac{1}{x^{|n|} \cdot y^{|n|}} = \frac{1}{x^{|n|}} \cdot \frac{1}{y^{|n|}} = x^{-|n|} \cdot y^{-|n|} = x^n \cdot y^n.$$

Analog lassen sich die beiden anderen Rechenregeln zeigen. $\square$

Üblicherweise vereinbart man:

$$x^0 = 1 \quad \text{für} \quad x \neq 0.$$

Dann gelten die Rechenregeln aus Satz 1.2 für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

Warnung:

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n \quad \text{im Allgemeinen,}$$

sondern

Satz 1.3 (Binomischer Lehrsatz). *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + y^n \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i\end{aligned}}$$

Dabei bezeichnet $\binom{n}{i}$ den Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{i} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1)}^{i \text{ abnehmende Faktoren}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i}_{i \text{ zunehmende Faktoren}}}$$

und man vereinbart zusätzlich $\binom{n}{0} = 0$.

- Wurzelfunktion: Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen:

  Definition 1.2.

  - *$f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $g\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $g(x) = x^2$.*
  - *Sei $n \in \mathbb{N}$. $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ist die Umkehrfunktion von $g\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $g(x) = x^n$.*

  Man beachte:

  $$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{und} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x.$$

  Rechenregeln:

  Satz 1.4. *Für alle $x, y \in [0,\infty)$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

  $$\boxed{\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x} = x^{\frac{1}{m\cdot n}} = x^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}}$$

  und

  $$\boxed{(x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}}}$$

Beweis der zweiten Rechenregel. Es gilt

$$\left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}\right)^n = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = x \cdot y$$

und natürlich auch

$$\left(\sqrt[n]{x \cdot y}\right)^n = x \cdot y$$

Aus der Eindeutigkeit der Umkehrabbildung folgt dann sofort die zweite Rechenregel. Analog lässt sich die erste Rechenregel zeigen. □

- Potenzfunktionen mit rationalen und reellen Exponenten:

Definition 1.3. *Sei $q \in \mathbb{Q}$, also $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.*

$$f(x) = x^q = \sqrt[n]{x^m} \quad \textit{für } x \in (0, \infty).$$

Aus den obigen Rechenregeln erhält man leicht:

Satz 1.5. *Für alle $x, y \in (0, \infty)$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:*

$$\boxed{x^p \cdot x^q = x^{p+q}} \qquad \boxed{(x^p)^q = x^{p \cdot q}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^q = x^q \cdot y^q}$$

Beweis für die dritte Rechenregel. Für $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x \cdot y)^q = \sqrt[n]{(x \cdot y)^m} = \sqrt[n]{x^m \cdot y^m} = \sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[n]{y^m} = x^q \cdot y^q.$$

Analog zeigt man die beiden anderen Rechenregeln. □

Jede reelle Zahl r lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen annähern. Damit lässt sich für jeden Exponenten $r \in \mathbb{R}$ eine Potenzfunktion definieren:

Definition 1.4 (siehe Abbildung 1.3)**.**

$$x^r = \lim_{\substack{q \to r \\ q \in \mathbb{Q}}} x^q$$

Es folgen leicht die Rechenregeln:

Satz 1.6. *Für alle $x, y \in (0, \infty)$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\boxed{x^r \cdot x^s = x^{r+s}} \qquad \boxed{(x^r)^s = x^{r \cdot s}} \qquad \boxed{(x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r}$$

- Exponentialfunktion:

Definition 1.5 (siehe Abbildung 1.4)**.** $f(x) = a^x$ *mit $a > 0$ (Basis) und $x \in \mathbb{R}$.*

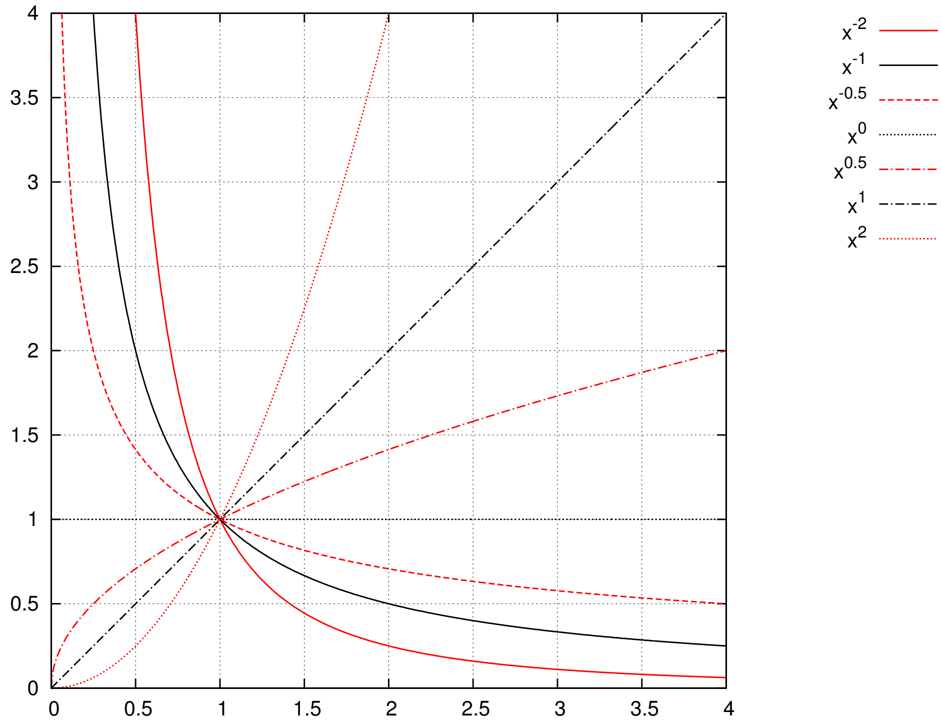

Abbildung 1.3: Potenzfunktionen für reelle Exponenten

Wichtige Spezialfälle:

$$a = 10, \quad a = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828..., \quad a = 2.$$

Rechenregeln:

Satz 1.7. *Sei $a \in (0,\infty)$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y} \quad \textit{und} \quad \boxed{(a^x)^y = a^{x\cdot y}}$$

- Logarithmusfunktionen:

Definition 1.6 (siehe Abbildung 1.5)**.** *$f(x) = \log_a x$ ($x > 0$) ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion a^x.*

Spezialfälle: $\log_{10} x = \lg x$, $\log_2 x = \operatorname{ld} x$, $\log_e x = \ln x$.

Man beachte

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

Rechenregeln

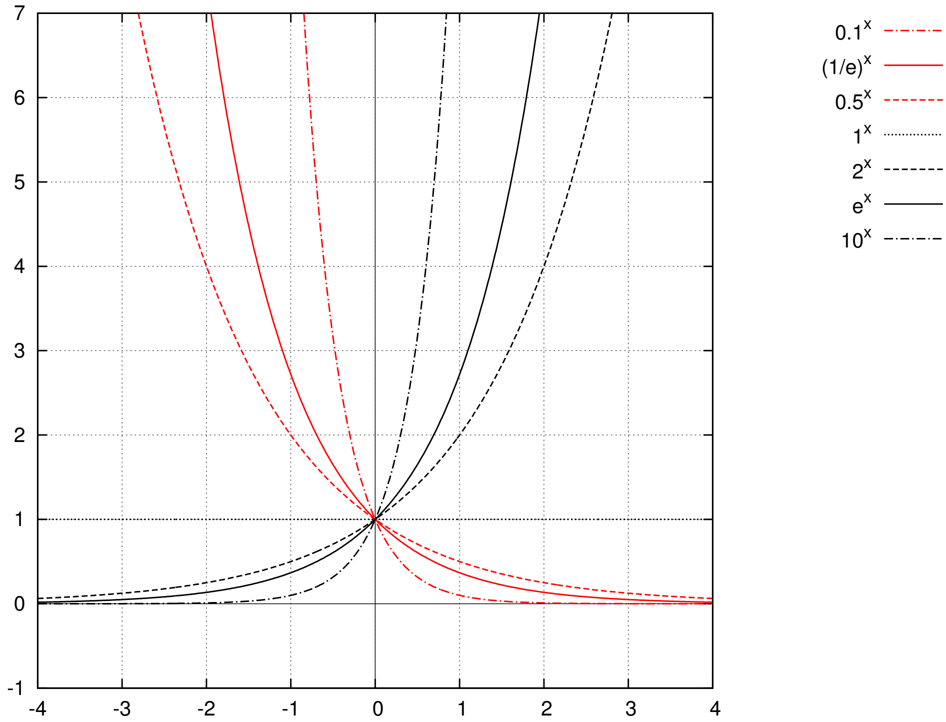

Abbildung 1.4: Exponentialfunktionen

Satz 1.8. *Seien $a, b \in (0, \infty)$. Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt:*

$$\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y} \quad \boxed{\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x}$$

und

$$\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$$

Beweis für die erste Rechenregel. Es gilt

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y$$

Der Beweis der zweiten und dritten Rechenregel erfolgt analog. □

- Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen):

  Definition 1.7 (siehe Abbildung 1.6)**.**

  – $\sin x, \cos x$: *geometrische Definition mit Hilfe des Einheitskreises*

  – $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

  Wichtige Eigenschaften:

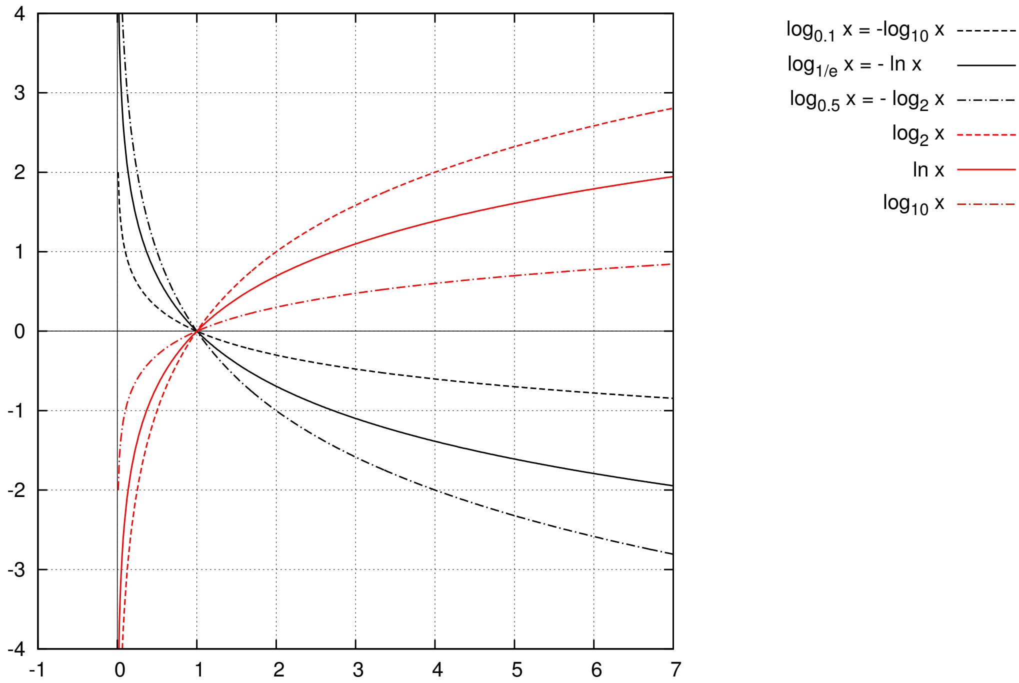

Abbildung 1.5: Logarithmusfunktionen

- $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Periodische Funktionen:
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
  $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$.
- Ungerade Funktionen:
  $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$
  Gerade Funktion:
  $\cos(-x) = \cos x$
- Nullstellen von sin: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von cos: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von tan: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Pole von tan: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Nullstellen von cot: $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
  Pole von cot: $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

  Spezielle Werte:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rechenregeln:

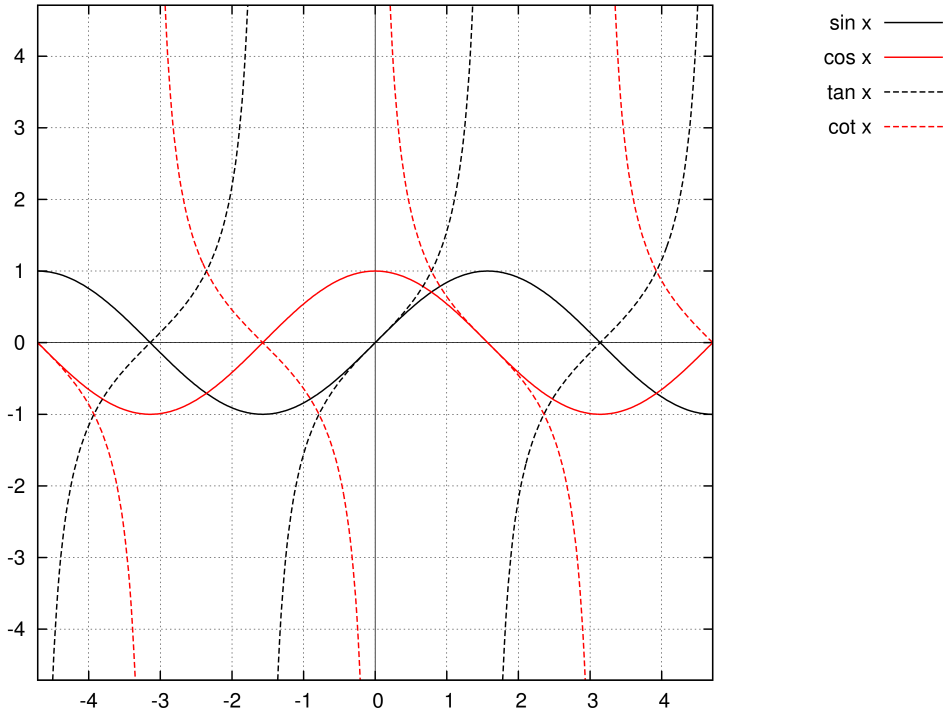

Abbildung 1.6: Winkelfunktionen

Satz 1.9. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt (Additionstheoreme):*

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}}$$

und:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

geometrische Beweise.

- Arkusfunktionen: Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktion:

  Hauptwerte:

  Definition 1.8 (siehe Abbildung 1.7)**.**

  – $\arcsin\colon [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *ist die Umkehrfunktion von* $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$.

  – $\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cos\colon [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$.

  – $\arctan\colon (-\infty,\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty,\infty)$.

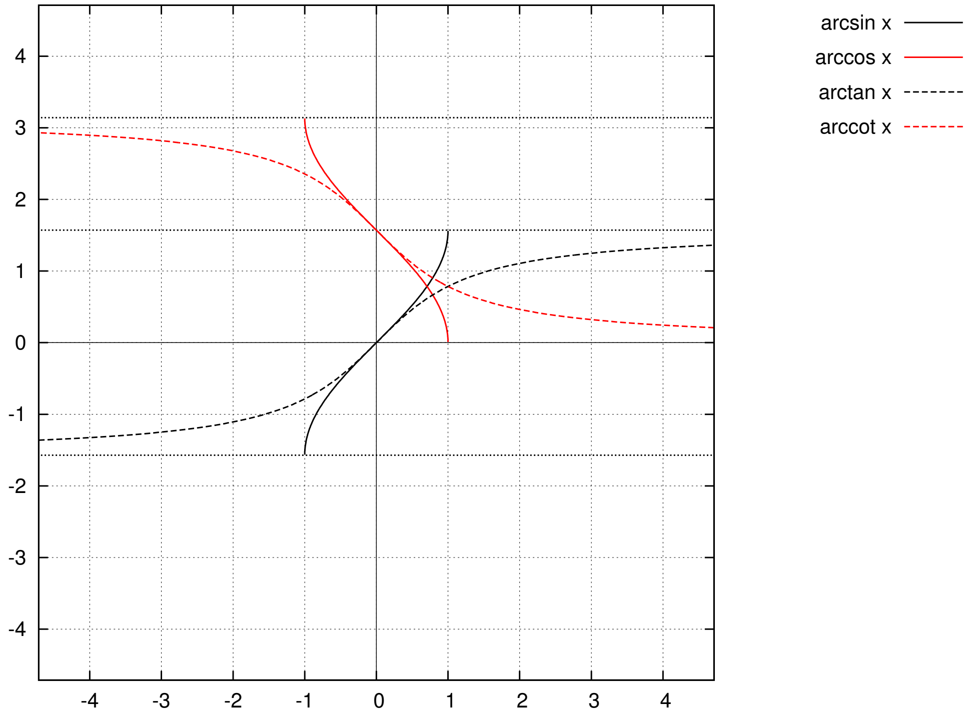

Abbildung 1.7: Arcusfunktionen

- $\operatorname{arccot}\colon (-\infty, \infty) \longrightarrow (0, \pi)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cot\colon\ (0, \pi) \longrightarrow (-\infty, \infty)$.

- Hyperbelfunktionen: sinh, cosh, tanh, coth.

  Definition 1.9 (siehe Abbildung 1.8)**.**

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right),$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

  Rechenregel:

  Satz 1.10. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt (Additionstheoreme):*

$$\boxed{\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y \end{aligned}}$$

  und:

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

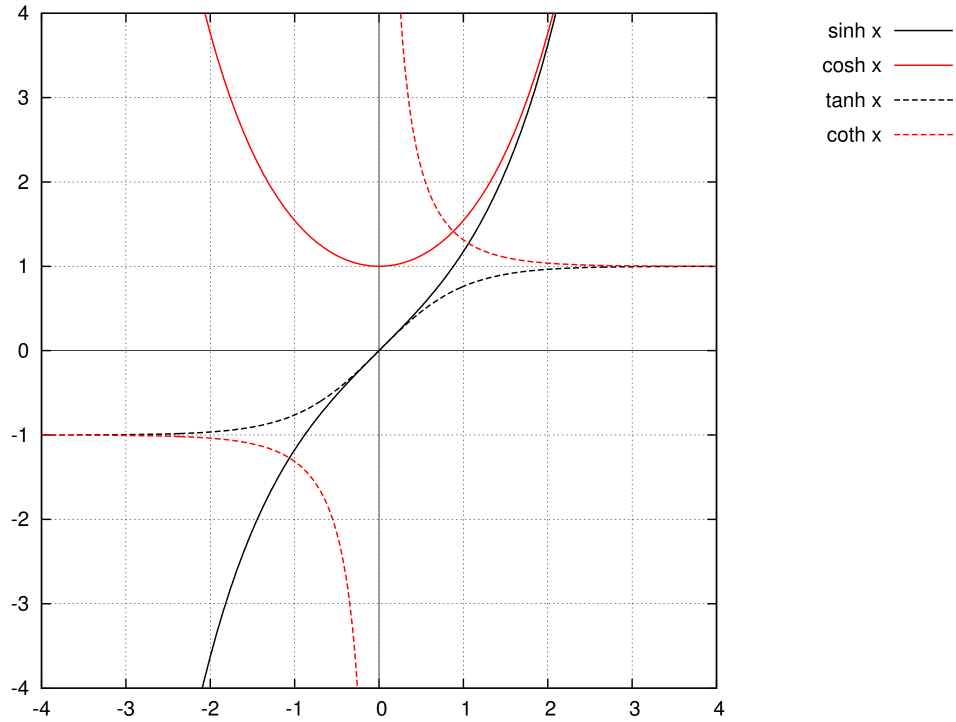

Abbildung 1.8: Hyperbelfunktionen

- Areafunktionen: Umkehrfunktionen von Hyperbelfunktionen

  Definition 1.10 (siehe Abbildung 1.9)**.**

  - $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\sinh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - $\operatorname{arcosh}\colon [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ *ist die Umkehrfunktion von* $\cosh\colon [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$.
  - $\operatorname{artanh}\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$.
  - $\operatorname{arcoth}\colon (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\coth\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

  Rechenregeln

  Satz 1.11. *Im jeweiligen Definitionsbereich gilt:*

$$\boxed{\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} \quad \textit{und} \quad \boxed{\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

und

$$\boxed{\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \quad \textit{und} \quad \boxed{\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

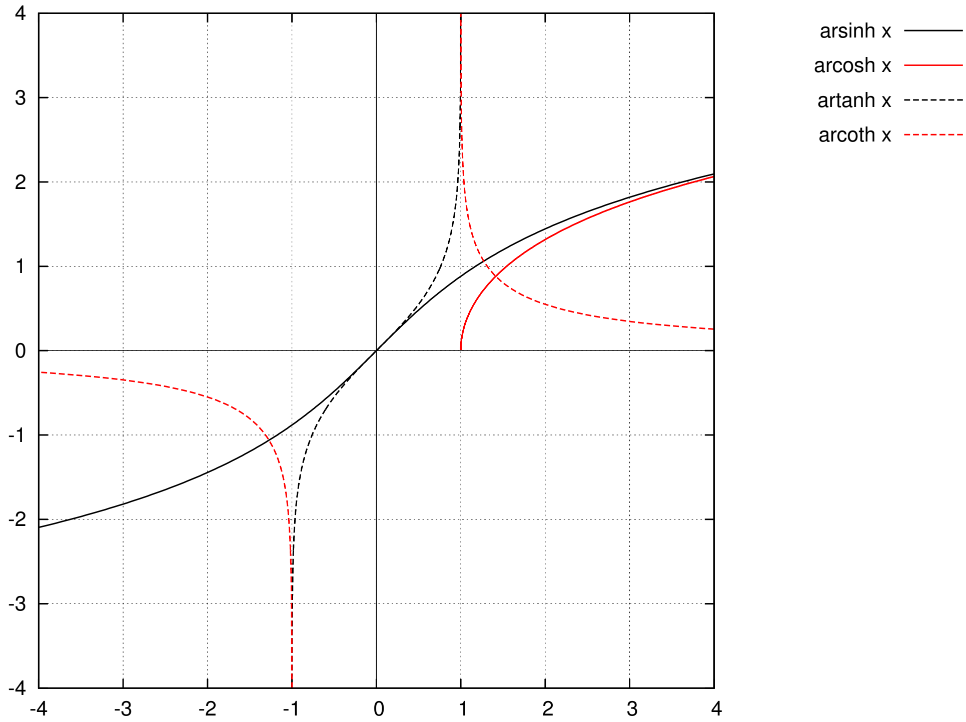

Abbildung 1.9: Areafunktionen

Beweis. Funktionsgleichung von sinh:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

Funktionsgleichung der Umkehrfunktion:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)$$

Also gilt:

$$\left(e^y\right)^2 - 2x\left(e^y\right) - 1 = 0$$

Daher folgt:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Also

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Ähnlich beweist man die anderen Rechenregeln. □

1.5 Beispiele zusammengesetzter Funktionen

- Polynomfunktionen:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

  $a_n \neq 0$: n Grad

- Rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit Polynomfunktionen} \quad p(x), q(x)$$

- $$f(x) = A\cos(\omega x - \varphi).$$

- $$f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \cdot \ln(x)}.$$

1.6 Stetige Funktionen

Definition 1.11. *Sei $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig im Punkt x_0, wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f\colon X \longrightarrow Y$ heißt stetig auf X, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

Satz 1.12. *f, g stetig: $f + g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ (in Punkten mit $g(x) \neq 0$), $f \circ g$ stetig.*

Satz 1.13. *Die Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Winkelfunktionen, Arkusfunktionen, Hyperbelfunktionen, Areafunktionen sind auf dem jeweils geeigneten Definitionsbereich stetig.*

Kapitel 2

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

2.1 Ableitung

Definition 2.1. *Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt Ableitung von f in x_0.

$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in X, wenn f in jedem Punkt von X differenzierbar ist. Die reelle Funktion $f'\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt Ableitung von f.

- Schreibweisen: $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$. Wenn die Funktion von der Zeit t abhängt, also $t \mapsto f(t)$, dann wird die Ableitung in einem Punkt t_0 auch mit $\dot{f}(t_0)$ bezeichnet.
- Der Ausdruck $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt Differenzenquotient.
- Alternative Schreibweise: Mit $x = x_0 + h$ erhält man
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
- Für
$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$$
gilt offensichtlich:
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h)$$
mit
$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$$

Die Funktion $x \mapsto f(x_0 + h) = f(x)$ unterscheidet sich also von der Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in einer Umgebung von x_0 nur um einen Term $r(h)$ (Restglied), der schneller klein wird als h klein wird.

Der Graph der (linearen) Funktion $x \mapsto f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, also alle Punkte (x, y) mit

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt (x_0, y_0) mit $y_0 = f(x_0)$.

- Physikalische Interpretation: Geschwindigkeit.

Es gilt

Satz 2.1. *Eine Funktion $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + r(h) \quad \textit{mit} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{2.1}$$

In diesem Fall gilt: $a = f'(x_0)$.

Beweis. Wenn f im Punkt x_0 differenzier ist, gilt (2.1) mit $a = f'(x_0)$, wie vorhin gezeigt. Umgekehrt, wenn (2.1), dann folgt

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a,$$

d.h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten und $a = f'(x_0)$. □

2.2 Differentiationsregeln

Satz 2.2 (Summen-, Produkt- und Quotientenregel)**.** *Seien $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f und g sind in x_0 differenzierbar. Dann gilt: $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis der Produktregel.

$$\begin{aligned}
&\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}\\
&\quad=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}\\
&\quad=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0+h)\cdot g(x_0)+f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}\\
&\quad=f(x_0+h)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}\\
&=\underbrace{\lim_{h\to 0}f(x_0+h)}_{f(x_0)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}+\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\cdot g(x_0)
\end{aligned}$$

□

Im Beweis wurde offensichtlich folgende Aussage verwendet:

Satz 2.3. *Sei $f\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ in einem nicht-isolierten Punkt $x_0\in X$ differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Zu zeigen:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\quad \text{d.h.}\quad f(x)-f(x_0)\to 0\quad \text{für}\quad x\to x_0.$$

Es gilt für $x\neq x_0$:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\to f'(x_0)\cdot 0=0$$

□

Satz 2.4 (Kettenregel)**.** *Seien $g\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ und $f\colon Y\longrightarrow\mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $g(X)\subset Y$. Seien $x_0\in X$ und $g(x_0)\in Y$ nicht-isolierte Punkte. Angenommen, g ist in x_0 und f ist in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann gilt: $f\circ g$ ist im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\frac{(f\circ g)(x_0+h)-(f\circ g)(x_0)}{h}\\
&\quad=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{h}
\end{aligned}$$

mit $k = g'(x_0) \cdot h + r_g(h)$.

Es gilt
$$f(g(x_0) + k) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot k + r_f(k).$$
Also
$$\begin{aligned}\frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} &= \frac{f'(g(x_0)) \cdot k + r_f(k)}{h} \\ &= (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot \frac{k}{h} = (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot (g'(x_0) + \rho_g(h))\end{aligned}$$
mit
$$\rho_f(k) = \begin{cases} \frac{r_f(k)}{k} & \text{für } k \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \rho_g(h) = \begin{cases} \frac{r_g(h)}{h} & \text{für } h \neq 0 \\ 0 & \text{für } h = 0 \end{cases}$$
Daher folgt:
$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot (g'(x_0) + \rho_g(h)) \\ &= \lim_{h \to 0} (f'(g(x_0)) + \rho_f(k)) \cdot \lim_{h \to 0} (g'(x_0) + \rho_g(h)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).\end{aligned}$$
□

Satz 2.5 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive reelle Funktion, $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Angenommen, f ist in x_0 differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$ und f^{-1} ist im Punkt $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann folgt: f^{-1} ist im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:*
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

Beweis.
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$
mit $y = f(x)$. Falls $y \to y_0$ folgt $x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$ wegen der Stetigkeit von f^{-1}. Daher gilt:
$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$
□

2.3 Die Ableitung spezieller Funktionen

- Exponentialfunktionen: $f(x) = e^x$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

Es gilt (geometrisch einsichtig, Beweis später):

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{und} \quad e^{-x} \geq 1 - x \quad \text{für alle } x > 0,$$

woraus man folgende Abschätzung erhält:

$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x \quad \text{für alle } x > 0.$$

Wegen

$$\frac{e^h - 1}{h} = \begin{cases} \dfrac{e^{|h|} - 1}{|h|} & \text{für } h > 0 \\ \dfrac{e^{-|h|} - 1}{-|h|} = e^{-|h|}\dfrac{e^{|h|} - 1}{|h|} & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

folgt daraus:

$$e^{-|h|} \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq e^{|h|}$$

Somit gilt:

$$1 = \lim_{h \to 0} e^{-|h|} \leq \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \leq \lim_{h \to 0} e^{|h|} = 1,$$

also

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

Daher folgt:

$$\boxed{(e^x)'} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \boxed{= e^x}$$

Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln(a)}$.

Mit der Kettenregel folgt:

$$\boxed{(a^x)'} = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) \boxed{= \ln a \cdot a^x}.$$

- Logarithmusfunktionen: $\log_a x = f^{-1}(x)$ mit $f(x) = a^x$.

Daher folgt:

$$\boxed{(\log_a x)'} = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} \boxed{= \frac{1}{\ln a \cdot x}}$$

$a = e$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- Potenzfunktionen: $x^r = e^{r \cdot \ln x}$

$$\boxed{(x^r)'} = e^{r \cdot \ln x} \cdot \frac{r}{x} \boxed{= r \cdot x^{r-1}}$$

- Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin\left(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= \frac{2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\
&= \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}
\end{aligned}$$

Es gilt (geometrischer Beweis) für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$:

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$$

Also

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin |x|}{|x|} = 1.$$

und daher

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Weiters gilt:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Daher

$$\boxed{(\cos x)'} = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \boxed{= -\sin x}$$

Wegen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

folgt aus der Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
\boxed{(\tan x)'} &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&\boxed{= \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \boxed{= 1 + \tan^2 x}
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x}$$

- Arkusfunktionen: $\arcsin x$ ist die Umkehrfunktion von $\sin x$. Also:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Nun gilt für $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Also

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Analog zeigt man:

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}, \quad \boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}}, \quad \boxed{(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}},$$

- Hyperbelfunktionen: $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

Also

$$\boxed{(\sinh x)'} = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \boxed{\cosh x}$$

Analog zeigt man:

$$\boxed{(\cosh x)' = \sinh x}, \quad \boxed{(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x}$$

und

$$\boxed{(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x}$$

- Areafunktionen: $\operatorname{arsinh}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$. Also

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)}$$

Nun gilt für $y = \operatorname{arsinh} x$

$$\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

Also

$$\boxed{(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

Analog zeigt man

$$\boxed{(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{für } x > 1}$$

und

$$\boxed{(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| < 1} \quad \text{und} \quad \boxed{(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| > 1}$$

2.4 Minima und Maxima

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.2. *Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein lokales Maximum von f, wenn*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \textit{für alle } x \in I \textit{ in einer Umgebung von } x_0.$$

Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein lokales Minimum von f, wenn

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \textit{für alle } x \in I \textit{ in einer Umgebung von } x_0.$$

Unter einem lokalen Extremum versteht man ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum.

Satz 2.6. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei x_0 ein innerer Punkt von I und f ist in diesem Punkt differenzierbar. Dann gilt: Falls x_0 ein lokales Extremum ist, folgt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Beweis für den Fall, dass x_0 ein lokales Maximum ist. Für hinreichend kleine Werte $h > 0$ gilt:

$$f(x_0 - h) \leq f(x_0) \quad \text{und} \quad f(x_0) \geq f(x_0 + h).$$

Daher folgt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

und

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} \geq 0$$

Also: $f'(x_0) = 0$. □

2.5 Höhere Ableitungen

- 2. Ableitung: Ableitung der Ableitung
- Schreibweise: $f''(x_0) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, $\ddot{f}(t_0)$,
- Interpretation: Krümmung, Beschleunigung
- 3. Ableitung: $f'''(x_0) = \dfrac{d^3 f}{dx^3}(x_0)$
- n-te Ableitung: $f^{(n)}(x_0) = \dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0)$

2.6 Die Taylor-Formel

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ sei ein innerer Punkt von I, und sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die im Punkt x_0 differenzierbar ist. Dann gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + r(x - x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Offensichtlich gilt:

$$T_1(x_0) = f(x_0) \quad \text{und} \quad T_1'(x_0) = f'(x_0).$$

Das Polynom $T_1(x)$ vom Grad 1 besitzt also an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Ableitung wie $f(x)$.

Sei f 2-mal differenzierbar. Wir bestimmen nun jenes Polynom $T_2(x)$ vom Grad 2, also

$$T_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2,$$

das zusätzlich an der Stelle x_0 auch die gleiche zweite Ableitung wie $f(x)$ besitzt. Es gilt:

$$T_2(x_0) = a_0, \quad T_2'(x_0) = a_1, \quad T_2''(x_0) = 2a_2.$$

Also muss gelten:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad 2a_2 = f''(x_0)$$

und wir erhalten

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Sei f 3-mal differenzierbar. Wir bestimmen nun jenes Polynom $T_3(x)$ vom Grad 3, also

$$T_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3,$$

das zusätzlich an der Stelle x_0 auch die gleiche dritte Ableitung wie $f(x)$ besitzt. Es gilt:

$$T_3(x_0) = a_0, \quad T_3'(x_0) = a_1, \quad T_3''(x_0) = 2a_2, \quad T_3'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3.$$

Die Bedingungen an a_0, a_1 und a_2 sind unverändert. Zusätzlich muss gelten:

$$2 \cdot 3 \cdot a_3 = f'''(x_0)$$

und wir erhalten

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}(x - x_0)^3.$$

Setzt man diese Überlegungen fort, so erhält man für jenes Polynom $T_n(x)$ vom Grad n, das an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert und die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie $f(x)$ besitzt:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i, \end{aligned}$$

wobei ! die Faktorielle bezeichnet, also

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \quad \text{für } k \geq 1.$$

$T_n(x)$ heißt das n-te **Taylor-Polynom**.

Satz 2.7 (Taylor-Formel)**.** *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I und $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar in I. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ eine Zahl $\theta \in (0, 1)$, sodass:*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Beweis. $n = 0$: Zu zeigen

$$f(x) = f(x_0) + \rho\,(x - x_0) \tag{2.2}$$

mit

$$\rho = f'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Für $x \neq x_0$ erhält man aus (2.2) zunächst folgende Darstellung von ρ:

$$\rho = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wir ersetzen nun auf der rechten Seite in (2.2) außer bei ρ die Größe x_0 durch eine neue Variable t und bilden die Differenz zur linken Seite. Diese Differenz $F(t)$ diskutieren wir als Funktion in t:

$$F(t) = f(x) - [f(t) + \rho\,(x - t)]\,.$$

Es gilt: $F(x_0) = F(x) = 0$. F ist eine stetige Funktion. Sie besitzt daher ein lokales Extremum an einer Stelle $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ zwischen x_0 und x. F ist in ξ differenzierbar. Daher

$$F'(\xi) = 0.$$

Nun gilt:

$$F'(t) = -f'(t) + \rho.$$

Also

$$-f'(\xi) + \rho = 0$$

Daraus folgt:

$$\rho = f'(\xi) = f'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Im allgemeinen Fall geht man ähnlich vor: Zu zeigen

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{\rho}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{2.3}$$

mit

$$\rho = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Für $x \neq x_0$ erhält man aus (2.3) zunächst folgende Darstellung von ρ:

$$\rho = \frac{(n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \right]$$

Wir ersetzen nun auf der rechten Seite in (2.3) außer bei ρ die Größe x_0 durch eine neue Variable t und bilden die Differenz zur linken Seiten. Diese Differenz $F(t)$ diskutieren wir als Funktion in t: Wir betrachten

$$F(t) = f(x) - \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x - t)^i + \frac{\rho}{(n+1)!}(x - t)^{n+1} \right]$$

Es gilt: $F(x_0) = F(x) = 0$. F ist eine stetige Funktion. Sie besitzt daher ein lokales Extremum an einer Stelle $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ zwischen x_0 und x. F ist in ξ differenzierbar. Daher

$$F'(\xi) = 0.$$

Nun gilt:

$$F'(t) = -f'(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x - t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{i!} i(x - t)^{i-1} \right] + \frac{\rho}{(n+1)!}\,(n+1)(x - t)^n$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&-f'(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1} \right] \\
&= -f'(t) - \left[\frac{f''}{1!}(x-t) - f'(t) \right] - \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) \right] \\
&\quad - \ldots - \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right] \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}
$$

Also

$$
F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{\rho}{n!} (x-t)^n
$$

Aus $F'(\xi) = 0$ folgt

$$
\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n = \frac{\rho}{n!} (x-\xi)^n
$$

und daraus sofort die Behauptung. □

Der Ausdruck

$$
\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}
$$

heißt die Lagrangesche Form des Restgliedes.

2.7 Minima und Maxima (Fortsetzung)

Definition 2.3. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine reelle Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, falls f differenzierbar ist und f' stetig ist. Eine reelle Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt k-mal stetig differenzierbar, falls f k-mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist.*

Satz 2.8. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar. Sei x_0 ein innerer Punkt von I mit*

$$
f'(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x_0) > 0 \ (< 0).
$$

Dann ist x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

Beweis. Da f'' stetig ist und $f''(x_0) > 0$, gibt es ein Intervall um x_0, in dem f'' positiv ist. Sei x ein Punkt aus dieser Umgebung von x_0. Dann gilt:

$$
f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x-x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0 + \theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2}_{\geq 0} \geq f(x_0).
$$

□

2.8 Weitere Anwendungen der Taylor-Formel

2.8.1 Monotonie von Funktionen

Definition 2.4. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$.*
f heißt monoton wachsend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$.
f heißt monoton fallend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x \leq y$ gilt: $f(x) \geq f(y)$.
f heißt streng monoton wachsend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt: $f(x) < f(y)$.
f heißt streng monoton fallend $\iff$ Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt: $f(x) > f(y)$.

Satz 2.9. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt*

- *f ist genau dann monoton wachsend (fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a,b)$.*
- *Falls $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton wachsend (fallend).*

Beweis. Angenommen f ist monoton wachsend. Dann gilt für $h > 0$:

$$f(x+h) \geq f(x).$$

Also

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Angenommen, $f'(x) \geq 0$. Für $x \leq y$ folgt dann:

$$f(y) = f(x) + \underbrace{f'(x + \theta(y-x))}_{\geq 0} \underbrace{(y-x)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Also ist f monoton wachsend. Falls $f'(x) > 0$, folgt mit dem selben Argument, dass f streng monoton wachsend ist. □

2.8.2 Approximation einer Funktion durch Taylor-Polynome

Mit Hilfe von Taylor-Polynomen lassen sich (komplizierte) Funktionen durch einfache polynomiale Funktionen approximieren.

Beispiel 2.1. *Das Taylor-Polynom $T_2(x)$ von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Restgliedabschätzung.*

$$T_2(x) = \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{-\sin 0}{2!} \cdot x^2 = x$$

Also

$$\sin x = x + R_2(x)$$

mit dem Restglied

$$R_2(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{3!} \cdot x^3.$$

Abschätzung des Restgliedes:

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot |x|^3.$$

Beispiel 2.2. *Das Taylor-Polynom $T_3(x)$ von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Restgliedabschätzung.*

$$T_3(x) = \cos 0 - \sin 0 \cdot x + \frac{-\cos 0}{2!} \cdot x^2 + \frac{\sin 0}{3!} \cdot x^3 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Also

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$$

mit dem Restglied

$$R_3(x) = \frac{\cos(\theta x)}{4!} \cdot x^4.$$

Abschätzung des Restgliedes:

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot x^4.$$

Beispiel 2.3. *Das Taylor-Polynom $T_1(x)$ von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ und Restgliedabschätzung.*

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Also

$$\sqrt{x} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{T_1(x)} \underbrace{-\frac{1}{8}\frac{1}{\xi\sqrt{\xi}}(x-1)^2}_{R_1(x)} \quad \textit{mit } \xi = 1 + \theta(x-1).$$

Abschätzung des Restgliedes:

$$|R_1(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{8}(x-1)^2 & \textit{für } x > 1 \\ \frac{1}{8x\sqrt{x}}(x-1)^2 & \textit{für } x < 1 \end{cases}$$

2.8.3 Taylor-Reihen

Die Folge der Taylor-Polynome nennt man Taylor-Reihe. Schreibweise:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Falls $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dann folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Schreibweise für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

In diesem Sinne:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Beispiel 2.4. *Die Taylor-Reihe für $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ und Untersuchung des Restgliedes für $n \to \infty$.*

$f^{(i)}(x) = e^x$

Taylor-Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Restglied:

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta\cdot x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Es gilt:

$$(k!)^2 \geq k^k$$

Beweis.

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (k-1)^2 \cdot k^2 = \underbrace{(1\cdot k)}_{\geq k} \cdot \underbrace{(2\cdot(k-1))}_{\geq k} \cdot \ldots \cdot \underbrace{((k-1)\cdot 2)}_{\geq k} \cdot \underbrace{(k\cdot 1)}_{\geq k}$$

□

Also folgt für $k = n+1$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)^{(n+1)/2}}$$

Daher

$$|R_n(x)| \le \max(1, e^x)\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \max(1, e^x)\left(\frac{|x|}{\sqrt{n+1}}\right)^{n+1} \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Also:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Beispiel 2.5. *Die Taylor-Reihe für* $\sin x$ *und* $\cos x$ *an der Stelle* $x_0 = 0$ *und Untersuchung des Restgliedes für* $n \to \infty$.

$$\sin^{(i)}(x) = \begin{cases} \sin x & \textit{für } i = 4j \\ \cos x & \textit{für } i = 4j+1 \\ -\sin x & \textit{für } i = 4j+2 \\ -\cos x & \textit{für } i = 4j+3 \end{cases}$$

Taylor-Reihe:

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$$

Restglied:

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Es gilt

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Also

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Analog zeigt man:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

Beispiel 2.6. *Die Taylor-Reihe für* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *an der Stelle* $x_0 = 0$ *und Untersuchung des Restgliedes für* $n \to \infty$.

Für $i \ge 1$ *gilt:*

$$f^{(i)}(x) = i!(1-x)^{-(i+1)}.$$

Taylor-Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i!}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Es gilt (endliche geometrische Reihe) für $x \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

und daher

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \to 0 \quad \textit{falls } |x| < 1.$$

Also gilt für $|x| < 1$ (geometrische Reihe):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Beispiel 2.7. *Die Taylor-Reihe für $f(x) = \ln(1 + x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.*
Für $i \geq 1$ gilt:

$$f^{(i)}(x) = (-1)^{i-1} (i-1)! (1+x)^{-i}.$$

Taylor-Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} (i-1)!}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\end{aligned}$$

Für $x \in (-1, 1]$ lässt sich zeigen, dass das Restglied gegen 0 konvergiert.

Kapitel 3

Integralrechnung in $\mathbb{R}$

3.1 Stammfunktion

Definition 3.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $F\colon I \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen. F heißt Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von $f \iff F$ ist differenzierbar und $F' = f$.*

- Falls F eine Stammfunktion von f ist, dann ist $F + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion. C nennt man Integrationskonstante.

- Schreibweise: $\int f(x)\ dx = F(x) + C$.

- Falls F_1 und F_2 Stammfunktionen von f auf dem Intervall I sind, dann gibt es eine Konstante C mit $F_2 = F_1 + C$.

  Beweis. Für $F = F_2 - F_1$ gilt: $F' = F_2' - F_1' = f - f = 0$. Sei x_0 ein innerer Punkt von I und sei $x \in I$. Aus dem Satz von Taylor folgt:

  $$F_2(x) - F_1(x) = F(x) = F(x_0) + F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) = F(x_0) \equiv C.$$

  □

- Mit der obigen Schreibweise gilt:

  $$\left(\int f(x)\ dx\right)' = f(x).$$

  Falls f differenzierbar ist, gilt offensichtlich, dass f Stammfunktion von f' ist:

  $$\int f'(x)\ dx = f(x) + C.$$

3.2 Stammfunktionen spezieller Funktionen

- Potenzfunktionen: es gilt $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, also $\left(\frac{x^r}{r}\right)' = x^{r-1}$ für $r \neq 0$. Mit der Setzung $\alpha = r - 1$ erhalten wir also für $\alpha \neq -1$:

$$\boxed{\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$$

Spezialfall $\alpha = 0$: $\int 1 \, dx = x + C$.

Spezialfall $\alpha = -1$: es gilt $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Also:

$$\boxed{\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C}$$

- Exponentialfunktionen: es gilt $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, also $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$. Für $a \neq 1$ erhalten wir also:

$$\boxed{\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

Spezialfall: $a = e$: $\int e^x \, dx = e^x + C$.

- Winkelfunktionen: Es gilt $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$, also $(-\cos x)' = \sin x$. Daher:

$$\boxed{\int \sin x \, dx = -\cos x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \cos x \, dx = \sin x + C}$$

Es gilt: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Also

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C}$$

- Hyperbelfunktionen: Analog zu den Winkelfunktionen erhält man:

$$\boxed{\int \sinh x \, dx = \cosh x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \cosh x \, dx = \sinh x + C}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C}$$

- Aus den Differentiationsregeln für die Arkusfunktionen folgt sofort:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2 \quad \text{für } |x|<1}$$

mit $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$ und

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2}$$

mit $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$.

- Aus den Differentiationsregeln für die Areafunktionen folgt sofort:

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C \quad \text{für } x>1}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C \quad \text{für } |x|<1}$$

und

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\operatorname{arcoth} x + C = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C \quad \text{für } |x|>1}$$

3.3 Integrationsregeln

Satz 3.1. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

1. *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit Stammfunktionen F und G. Dann ist $F+G$ eine Stammfunktion von $f+g$:*

$$\int \big[f(x)+g(x)\big]\;dx = \int f(x)\;dx + \int g(x)\;dx.$$

2. *Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $c \cdot F$ eine Stammfunktion von $c \cdot f$:*

$$\int \big[c\cdot f(x)\big]\;dx = c\cdot \int f(x)\;dx.$$

Beweis.
$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$
$$(c \cdot F)'(x) = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x).$$
□

Satz 3.2 (Partielle Integration)**.** *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare reelle Funktionen und $\varphi = f \cdot g'$ besitze eine Stammfunktion Φ. Dann ist $f \cdot g - \Phi$ eine Stammfunktion von $f' \cdot g$:*
$$\int f'(x) \cdot g(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\ dx.$$

Beweis.
$$\begin{aligned}(f \cdot g - \Phi)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - \Phi'(x) \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) - f(x) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$
□

Satz 3.3 (Substitutionsregel)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Seien $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit Stammfunktion F, $g\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g(I) \subset J$. Dann ist $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$.*
$$\int f(x)\ dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt \quad \mathit{mit} \quad x = g(t)$$

Beweis. Mit der Kettenregel gilt:
$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$
□

3.4 Beispiele

Beispiel 3.1. *Stammfunktionen von $\ln|x|$ und $\log_a|x|$:*

Partielle Integration:
$$\int \ln|x|\ dx = \int (x)' \cdot \ln|x|\ dx = x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x \cdot \ln|x| - x + C$$
Also
$$\boxed{\int \ln|x|\ dx = x \cdot \ln|x| - x + C}$$
für die Definitionsbereiche $I = (0, \infty)$ bzw. $I = (-\infty, 0)$.

Wegen $\log_a|x| = \log_a e \cdot \ln|x|$ und $1 = \log_a a = \log_a e \cdot \ln a$ folgt: $\log_a|x| = \dfrac{\ln|x|}{\ln a}$ und daher:
$$\boxed{\int \log_a|x|\ dx = \frac{1}{\ln a}(x \cdot \ln|x| - x) + C}$$

Beispiel 3.2. *Stammfunktionen von* $\tan x$*,* $\cot x$*,* $\tanh x$ *und* $\coth x$*.*
Substitutionregel: Mit

$$u = \cos x = g(x) \quad \textit{und} \quad g'(x) = -\sin x$$

folgt

$$\begin{aligned} \int \tan x \; dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \; dx = \int \frac{-g'(x)}{g(x)} \; dx \\ &= \int f(g(x)) \cdot g'(x) \; dx = \int f(u) \; du \quad \textit{für} \quad f(u) = -\frac{1}{u} \\ &= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

Also

$$\boxed{\int \tan x \; dx = -\ln|\cos x| + C}$$

Spezialfall der allgemeinen Formel

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)} \; dx = \ln|g(x)| + C}$$

Damit folgt sofort:

$$\boxed{\int \cot x \; dx = \ln|\sin x| + C}$$

und

$$\boxed{\int \tanh x \; dx = \ln|\cosh x| + C} \quad \textit{und} \quad \boxed{\int \coth x \; dx = \ln|\sinh x| + C}$$

Beispiel 3.3. *Stammfunktionen von* $x \cdot e^x$
Partielle Integration:

$$\int x \cdot e^x \; dx = \int (e^x)' \cdot x \; dx = x \cdot e^x - \int e^x \; dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Beispiel 3.4. *Stammfunktionen von* $\sin^2 x$
Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \; dx &= \int (-\cos x)' \cdot \sin x \; dx = -\cos x \cdot \sin x - \int (-\cos x) \cos x \; dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \; dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \; dx \\ &= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \; dx \end{aligned}$$

Also

$$2\int \sin^2 x\ dx = x - \sin x \cdot \cos x$$

und somit

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C$$

Beispiel 3.5. *Stammfunktionen von* $\sqrt{1-x^2}$ *für* $x \in [-1,1]$.

Substitutionsregel: Mit $x = \sin t = g(t)$ *für* $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *folgt:*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\ dt = \int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cdot \cos t) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right) + C\end{aligned}$$

Beispiel 3.6. *Stammfunktionen von* $\sqrt{x^2+1}$

Substitutionsregel: Mit $x = \sinh t = g(t)$ *für* $t \in \mathbb{R}$ *folgt:*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\ dx &= \int \sqrt{\sinh^2 t + 1} \cosh t\ dt = \int \cosh^2 t\ dt = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cdot \cosh t) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} x + x \cdot \sqrt{1+x^2}\right) + C\end{aligned}$$

Beispiel 3.7. *Stammfunktionen von* $\sqrt{x^2+x+1}$.

Substitutionsregel: Es gilt:

$$x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\, x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

Also

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sqrt{(a\,x+b)^2 + 1}\ dx \quad \textit{mit} \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \textit{und} \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Es gilt allgemein: Falls F *eine Stammfunktion von* f *ist, dann gilt:*

$$\boxed{\int f(a\,x+b)\ dx = \frac{1}{a} F(a\,x+b)}$$

Beweis. Substitutionsregel mit $t = a\,x + b$ oder durch direkte Überprüfung. □

Daher folgt:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+x+1}\ dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(ax+b) + (ax+b) \cdot \sqrt{(ax+b)^2+1}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} \cdot \operatorname{arsinh} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x+1}{2} \cdot \sqrt{x^2+x+1}\right) + C\end{aligned}$$

3.4.1 Stammfunktionen von rationalen Funktionen:

Partialbruchzerlegung:

Sei f eine rationale Funktion, also

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit Polynomen } p(x),\ q(x).$$

Polynomdivision, falls $\deg p(x) \geq \deg q(x)$:

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{mit Polynomen } r(x),\ s(x),\ \deg r(x) < \deg q(x)$$

also

$$f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Faktorisierung von $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) = c\,(x-x_1)^{r_1} \cdot (x-x_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_m)^{r_m} \\ \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_nx+q_n)^{s_n} \end{aligned}$$

mit $r_i, s_i \in \mathbb{N}$ und $x_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $p_i^2 < 4q_i$.

Ansatz:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$$

Die Zahlen a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} lassen sich durch Koeffizientenvergleich nach Multiplikation mit $q(x)$ bestimmen.

Beispiel 3.8. *Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.*

Polynomdivision

$$x^3 + 2 = x \cdot (x^2-1) + x + 2 \quad \textit{also } f(x) = x + \frac{x+2}{x^2-1}$$

Faktorisierung

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x-1}$$

Multiplikation mit x^2-1:

$$x + 2 = a_1 \cdot (x-1) + a_2 \cdot (x+1) = (a_1+a_2) \cdot x - a_1 + a_2$$

Koeffizientenvergleich

$$a_1 + a_2 = 1 \quad \textit{und} \quad -a_1 + a_2 = 2 \quad \Longrightarrow a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{3}{2}$$

Daher

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Beispiel 3.9. *Partialbruchzerlegung von* $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Multiplikation mit $x^2(x^2+1)$*:*

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 \cdot x(x^2+1) + a_2 \cdot (x^2+1) + (bx+c) \cdot x^2 \\ &= (a_1 + b) \cdot x^3 + (a_2 + c) \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad c = -a_2 = -1, \quad b = -a_1 = 0.$$

Daher

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Integration:

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx = &\boxed{\int s(x)\, dx} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} \boxed{\int \frac{1}{(x-x_i)^j}\, dx} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} \left[b_{ij} \boxed{\int \frac{x}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}\, dx} + c_{ij} \boxed{\int \frac{1}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}\, dx} \right] \end{aligned}$$

-
$$\boxed{\int \frac{1}{(x-x_i)^j}\, dx = \int (x-x_i)^{-j}\, dx} = \begin{cases} \ln|x-x_i| & \text{für } j = 1 \\ -\dfrac{1}{j-1} \dfrac{1}{(x-x_i)^{j-1}} & \text{für } j > 1 \end{cases}$$

-
$$\boxed{\frac{x}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}} = \frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{2x + p_i}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}} - \frac{p_i}{2} \cdot \boxed{\frac{1}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}}$$

-
$$\boxed{\int \frac{2x+p_i}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,dx} = \int \frac{g'(x)}{g(x)^j}\,dx \quad \text{mit} \quad g(x) = x^2+p_ix+q_i$$
$$= \begin{cases} \ln|g(x)| & \text{für } j=1 \\ -\dfrac{1}{j-1}\dfrac{1}{g(x)^{j-1}} & \text{für } j>1 \end{cases}$$

-
$$x^2+p_ix+q_i = \left(x+\frac{p_i}{2}\right)^2 + d_i^2 = d_i^2\left(\frac{1}{d_i}x+\frac{p_i}{2d_i}\right)^2 \quad \text{mit } d_i = \sqrt{q_i-\frac{p_i^2}{4}}$$
$$= d_i^2\,(a\,x+b)^2 \quad \text{mit } a = \frac{1}{d_i},\ b = \frac{p_i}{2d_i}.$$

Daher

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\,dx} = \frac{1}{d_i^{2j}}\cdot\int \frac{1}{\left[(a\,x+b)^2+1\right]^j}\,dx \quad \text{mit } a=\frac{1}{d_i},\ b=\frac{p_i}{2d_i}$$
$$= \frac{1}{d_i^{2j-1}}\cdot F(a\,x+b) \quad \text{mit} \quad F(u) = \boxed{\int \frac{1}{(u^2+1)^j}\,du}$$

Spezialfall $j=1$:

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2+1}\,du} = \arctan u + C$$

Für $j \geq 1$ gilt:

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^j}\,du = \frac{u}{(u^2+1)^j} - (-j)\int \frac{2u^2}{(u^2+1)^{j+1}}\,du$$
$$= \frac{u}{(u^2+1)^j} + 2j\int \frac{u^2}{(u^2+1)^{j+1}}\,du$$
$$= \frac{u}{(u^2+1)^j} + 2j\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{j+1}}\,du$$
$$= \frac{u}{(u^2+1)^j} + 2j\int \frac{1}{(u^2+1)^j}\,du - 2j\int \frac{1}{(u^2+1)^{j+1}}\,du$$

Also

$$2j\int \frac{1}{(u^2+1)^{j+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+1)^j} + (2j-1)\int \frac{1}{(u^2+1)^j}\,du$$

Somit

$$\boxed{\int \frac{1}{(u^2+1)^{j+1}}\,du} = \frac{u}{2j(u^2+1)^j} + \frac{2j-1}{2j}\boxed{\int \frac{1}{(u^2+1)^j}\,du}$$

Spezialfall $j = 1$;

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan u + C$$

Beispiel 3.10. *Stammfunktionen von* $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$.

Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Stammfunktion

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+1}{x^2-1}\,dx &= \int x\,dx - \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + C\end{aligned}$$

Beispiel 3.11. *Stammfunktionen von* $f(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)}$.

Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Stammfunktion

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= -\frac{1}{x} - \arctan x + C\end{aligned}$$

Stammfunktion von Funktionen der Form $f(x) = r(\sin x, \cos x)$

Substitution

$$x = 2\arctan t = g(t)$$

Es gilt:

$$g'(t) = \frac{2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Also

$$\int f(x)\,dx = \int r\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \quad \text{mit} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

Ist $r(u,v)$ eine rationale Funktion in u und in v, dann ist nach der Substitution der Integrand eine rationale Funktion in t.

Beispiel 3.12. *Stammfunktionen von* $\frac{1}{\sin x}$.

$$\int \frac{1}{\sin x}\ dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

3.5 Das Riemann-Integral

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Wir zerlegen das Intervall in n Teilintervalle

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

- Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
- Länge des Teilintervalls $[x_{k-1}, x_k]$: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
- Feinheit der Zerlegung $h = \max\{\Delta x_k \colon k = 1, 2, \ldots, n\}$.
- Zwischenpunkte: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Riemann-Summe

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Definition 3.2. *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt genau dann Riemann-integrierbar (kurz R-integrierbar), wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} S(f, Z, \xi) = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)\ dx$$

existiert. Wir definieren zusätzlich

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Man nennt $\int_a^b f(x)dx$ ein bestimmtes Integral. Alternative Schreibweise für $a < b$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f(x)\ dx.$$

Es gilt (ohne Beweis):

Satz 3.4. *Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f R-integrierbar.*

Das so genannte Lebesguesche Integrabilitätskriterium gibt genaue Auskunft, unter welchen Bedingungen eine Funktion R-integrierbar ist. Dazu benötigen wir zunächst die folgenden Begriffe:

Definition 3.3. 1. *Eine Menge $N \subset \mathbb{R}$ heißt eine (Lebesgue-)Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ Intervalle I_n, $n \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

$|I_n|$ bezeichnet die Länge des Intervalls I_n.

2. *Eine Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann fast überall stetig auf $[a,b]$, wenn f auf $[a,b] \setminus N$ stetig ist, wobei N eine Nullmenge ist.*

Das Lebesguesche Integrabilitätskriterium lautet nun (ohne Beweis):

Satz 3.5. *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar ist, wenn f beschränkt ist und wenn f auf $[a,b]$ fast überall stetig ist.*

Es gelten folgende wichtigen Aussagen für das bestimmte Integral:

Satz 3.6. *Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. *$f + g$ und $c \cdot f$ sind R-integrierbar mit*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \; dx = \int_a^b f(x) \; dx + \int_a^b g(x) \; dx,$$
$$\int_a^b [c \cdot f(x)] \; dx = c \cdot \int_a^b f(x) \; dx.$$

2. *Für alle $c \in (a,b)$ sind $f\big|_{[a,c]}$ und $f\big|_{[c,b]}$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^c f(x) \; dx + \int_c^b f(x) \; dx = \int_a^b f(x) \; dx$$

3. *Falls $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann*

$$\int_a^b f(x) \; dx \le \int_a^b g(x) \; dx.$$

4. *$|f|$ ist R-integrierbar und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x) \; dx \right| \le \int_a^b |f(x)| \; dx \le (b-a) \cdot \sup\{|f(x)| \colon x \in [a,b]\}.$$

5. *f^2, g^2 und $f \cdot g$ sind R-integrierbar und es gilt (Cauchy-Schwarz-Ungleichung):*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\ dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\ dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2\ dx}.$$

Beweis. Die Existenz der Integrale folgt für stetige Funktionen aus dem obigen Satz, im allgemeinen Fall mit Hilfe des Lebesgueschen Integrabilitätskriteriums. Die behaupteten Identitäten oder Ungleichungen zeigt man zuerst für Riemann-Summen und führt anschließend den Grenzwertübergang durch, z.B.:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k) + g(\xi_k)] \cdot \Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \cdot \Delta x_k \\ &\to \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.\end{aligned}$$

□

3.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 3.7. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gilt:*

1. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

differenzierbar und es gilt $F' = f$:

$$\left(\int_a^x f(t)\ dt \right)' = f(x).$$

F ist also eine Stammfunktion.

2. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a).$$

Beweis. Zu 1.: Für $x_0, x \in [a,b]$ mit $x > x_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \left[\int_a^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt \right] \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left[\int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^x f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt \right] = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\ dt\end{aligned}$$

Also

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \big[f(t)-f(x_0)\big]\ dt$$

und daher

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \sup\{|f(t)-f(x_0)| : t \in [x_0,x]\} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to x_0.$$

Der Beweis für $x < x_0$ verläuft völlig analog.

Zu 2.: Sowohl $f(x)$ also auch $\int_a^x f'(t)dt$ sind Stammfunktionen von $f'(x)$. Also gibt es eine Konstante C mit

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + C.$$

Für $x = a$ folgt daher: $f(a) = C$, also

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $x = b$. □

Ähnlich wie den zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zeigt man die folgenden beiden Sätze:

Satz 3.8 (Partielle Integration)**.** *Seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare reelle Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\ dx = \underbrace{f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)}_{f(x)\cdot g(x)\big|_a^b} - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\ dx.$$

Beweis. Aus dem entsprechenden Satz für unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) und dem Hauptsatz folgt sofort, dass es eine Konstante C gibt, sodass:

$$\int_a^x f'(t)\cdot g(t)\ dt = f(x)\cdot g(x) - \int_a^x f(t)\cdot g'(t)\ dt + C.$$

Für $x = a$ folgt: $0 = f(a)\cdot g(a) + C$, also

$$\int_a^x f'(t)\cdot g(t)\ dt = f(x)\cdot g(x) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^x f(t)\cdot g'(t)\ dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $x = b$. □

Satz 3.9 (Substitutionsregel)**.** *Seien $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g([a,b]) \subset [c,d]$. Dann gilt:*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)\ dt.$$

Beweis. Aus dem entsprechenden Satz für unbestimmte Integrale (Stammfunktionen) und dem Hauptsatz folgt sofort, dass es eine Konstante C gibt, sodass:

$$\int_c^{g(y)} f(x)\ dx = \int_a^y f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt + C \quad \text{für alle } y \in [a, b].$$

Für $y = a$ folgt:

$$\int_c^{g(a)} f(x)\ dx = C,$$

also

$$\underbrace{\int_c^{g(y)} f(x)\ dx - \int_c^{g(a)} f(x)\ dx}_{= \int_{g(a)}^{g(y)} f(x)\ dx} = \int_a^y f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

Daraus erhält man die Behauptung für $y = b$. □

3.7 Uneigentliche Integrale

Integrale unbeschränkter Funktionen auf beschränkten Intervallen und Integrale auf unbeschränkten Intervallen als Grenzwerte von Riemann-Integralen.

- Beispiel: Das Riemann-Integral der unbeschränkten Funktion

  $$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|t|}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

  auf dem Intervall $[-1, 1]$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral

  $$\int_{-1}^1 f(t)\ dt = \lim_{x \to 0-} \int_{-1}^x f(t)\ dt + \lim_{x \to 0+} \int_x^1 f(t)\ dt.$$

  existiert für die obige Funktion: $f(t)$ besitzt die Stammfunktion $F(t)$ mit

  $$F(t) = \begin{cases} -2\sqrt{|t|} & \text{für } t < 0, \\ +2\sqrt{|t|} & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

  Für $x < 0$ gilt:

  $$\int_{-1}^x f(t)\ dt = -2\sqrt{|x|} + 2 \to 2 \quad \text{für } x \to 0.$$

  Für $x > 0$ gilt:

  $$\int_x^1 f(t)\ dt = 2 - 2\sqrt{|x|} \to 2$$

Also
$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = 4.$$

- Warnbeispiel: Für die Funktion
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$
auf dem Intervall $[-1, 1]$ gilt für $\varepsilon > 0$:
$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt + \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt = \ln|\varepsilon| - \ln 1 + \ln 1 - \ln|\varepsilon| = 0$$
Daher existiert natürlich auch der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$:
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt + \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt \right] = 0.$$
Diesen Grenzwert nennt man den Cauchyschen Hauptwert. Das uneigentliche Integral existiert nicht, da die einzelnen Grenzwerte nicht in $\mathbb{R}$ existieren:
$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(t)\ dt \to -\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \quad \text{und} \quad \int_{\varepsilon}^{1} f(t)\ dt \to +\infty \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

- Beispiel:
$$\int_{0}^{\infty} e^{-t}\ dt = \lim_{x \to \infty} \int_{0}^{x} e^{-t}\ dt = \lim_{x \to \infty} \left[-e^{-x} + 1 \right]\ dt = 1.$$

- Warnbeispiel
$$\lim_{k \in \mathbb{N},\ k \to \infty} \int_{0}^{2k\pi} \sin x\ dx = \lim_{k \in \mathbb{N},\ k \to \infty} [-\cos x]\,\Big|_{0}^{2k\pi} = -1 + 1 = 0.$$
Trotzdem existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sin x\ dx$ nicht!
$$\lim_{k \in \mathbb{N},\ k \to \infty} \int_{0}^{2k\pi+\pi} \sin x\ dx = \lim_{k \in \mathbb{N},\ k \to \infty} [-\cos x]\,\Big|_{0}^{2k\pi+\pi} = 0 + 1 = 1.$$

Alle Rechenregeln gelten auch für uneigentliche Integrale, vorausgesetzt alle auftretenden uneigentlichen Integrale existieren.

- Beispiel Gamma-Funktion für $x \in (0, \infty)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Es gilt (siehe Übung):

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \underbrace{-t^x e^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Also: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Daraus folgt für $n \in \mathbb{N}_0$: $\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) = n!$. (Beachte $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$.)

- Substitutionsregel: $\frac{x-\mu}{\sigma} = u$, also: $x = \mu + \sigma u$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

Später werden wir zeigen: $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \sqrt{2\pi}$, damit folgt dann

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx = 1.$$

Schon jetzt lässt sich durch die Substitution $\frac{1}{2}u^2 = t$, also: $u = \sqrt{2t}$ ein Zusammenhang mit der Gamma-Funktion herstellen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du &= 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du \\ &= 2\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sqrt{2}}{2} t^{-1/2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

Der Aussage $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \sqrt{2\pi}$ entspricht dann: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Kapitel 4

Differentialgleichungen in $\mathbb{R}$

4.1 Grundbegriffe

- Allgemeine Form einer Differentialgleichung

  $$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

  Kurzschreibweise: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

- Ordnung einer Differentialgleichung: Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung der gesuchten Funktion

  $$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & F(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ \text{2. Ordnung} \quad & F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \end{aligned}$$

- explizite Differentialgleichungen

  $$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & y'(x) = f(x, y(x)) \\ \text{2. Ordnung} \quad & y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \end{aligned}$$

- lineare Differentialgleichungen

  $$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x) \\ \text{2. Ordnung} \quad & a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x) \qquad (4.1) \end{aligned}$$

  lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

  $$\begin{aligned} \text{1. Ordnung} \quad & a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = f(x) \\ \text{2. Ordnung} \quad & a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = f(x) \\ n\text{-ter Ordnung} \quad & a_n\, y^{(n)}(x) + \ldots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = f(x) \end{aligned}$$

homogene lineare Differentialgleichungen: $f(x) \equiv 0$.

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0 \tag{4.2}$$

4.2 Einfache Beispiele

1. $$y'(x) = f(x)$$

   Lösungen

   $$y(x) = \int f(x)\; dx$$

2. $$y''(x) = f(x)$$

   Lösungen

   $$y(x) = \int F(x)\; dx \quad \text{mit} \quad F(x) = \int f(x)\; dx$$

3. $$y'(x) = y(x)$$

   Lösungen

   $$y(x) = C \cdot e^x$$

4. $$y''(x) = y(x)$$

   Lösungen

   $$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} = C_1' \cdot \sinh x + C_2' \cdot \cosh x$$

5. $$y''(x) = -y(x)$$

   Lösungen

   $$y(x) = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

4.3 Trennung der Variablen

Beispiel 4.1. *Lösungen der Differentialgleichung*

$$y'(x) + x \cdot y(x)^2 = 0.$$

Durch einfache Umformungen erhält man:

$$-\frac{y'(x)}{y(x)^2} = x$$

Integration:

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \textit{also} \quad y(x) = \frac{2}{x^2 + C'}.$$

Diese Strategie heißt Trennung der Variablen und funktioniert für Differentialgleichungen, die sich auf die folgende Form bringen lassen:

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x)$$

Kurzschreibweise

$$g(y) \cdot y' = f(x)$$

Durch Integration erhält man:

$$\int g(z)\ dz = \int f(x)\ dx \quad \text{mit} \quad z = y(x)$$

4.4 Lineare Differentialgleichungen

Allgemeine Eigenschaften linearer Differentialgleichungen:

Satz 4.1. 1. *(Superpositionsprinzip) Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der homogenen Differentialgleichung* (4.2) *sind, dann ist auch $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2).

2. *Wenn $y_p(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* (4.1) *und $y_{hom}(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2) *sind, dann ist $y_p(x) + y_{hom}(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung* (4.1).

3. *Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung* (4.1) *sind, dann ist $y_2(x) - y_1(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (4.2).

4. *Jede Lösung $y_{inh}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung lässt sich als Summe einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung* (4.1) *und einer Lösung $y_{hom}(x)$ der homogonen Differentialgleichung* (4.2) *darstellen.*

4.4.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In expliziter Form:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

- Homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'(x) + a \cdot y(x) = 0$$

Exponentialansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung, erhält man die Bedingung:

$$\lambda = -a$$

und daher die Lösung:

$$\boxed{y(x) = c \cdot e^{-a\,x}}$$

- Homogene Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten: Trennung der Variablen

$$y'(x) = -a(x) \cdot y(x) \quad \text{also} \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

Integration:

$$\ln|y(x)| = -\int a(x)\ dx + C \quad \text{also} \quad \boxed{y(x) = c \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}$$

- Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Ansatz: Für spezielle Funktionen $f(x)$, wie z.B. $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit $p(x) = x^n$ und $q(x) \in \{e^{\alpha\,x}, \sin(\beta\,x), \cos(\beta\,x)\}$ und Linearkombinationen solcher Funktionen, lässt sich oft eine partikuläre Lösung der selben Form finden:

Beispiel 4.2. *Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung*

$$y'(x) - y(x) = e^{-2x}$$

durch einen geeigneten Ansatz und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.

Mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c_1 \cdot e^{-2x}$$

erhält man die Bedingungen

$$-2c_1 - c_1 = 1 \quad \textit{also} \quad y_p(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-2x}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-2x} + c \cdot e^{x}.$$

Warnung: Ansatz funktioniert nicht für die rechte Seite $f(x) = e^x$.

- Variation der Konstanten: Allgemeine Strategie, um eine partikuläre Lösung zu finden.

Beispiel 4.3. *Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung*

$$y'(x) - y(x) = e^{-2x}$$

durch Variation der Konstanten und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' - y = 0$:

$$y_{hom}(x) = c \cdot e^x$$

Ansatz für die partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^x$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhält man:

$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = e^{-2x}$$

Also

$$c'(x) = e^{-3x}$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$c(x) = -\frac{1}{3}\, e^{-3x}$$

Damit erhält man für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = -\frac{1}{3} e^{-2x} + C \cdot e^x$$

Allgemeine Strategie für

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$$

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung
$$y_{hom}(x) = c \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$

2. Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch den Ansatz:
$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}$$
Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhält man:
$$c'(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx} + \underbrace{c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}(-a(x)) + a(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}_{=0} = f(x)$$
Also
$$c'(x) = f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}$$
Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist
$$c(x) = \int f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}\ dx$$

3. Damit erhält man für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\boxed{y(x) = \left(\int f(x) \cdot e^{\int a(x)\ dx}\ dx \right) \cdot e^{-\int a(x)\ dx}}$$

4.4.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

- Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0$$

Exponentialansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichungen erhält man die Bedingung (charakteristische Gleichung):

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0 \tag{4.3}$$

Wegen

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = \left(\lambda^2 + a \cdot \lambda + \frac{a^2}{4} \right) - \left(\frac{a^2}{4} - b \right)$$

ist (4.3) zur Gleichung

$$\left(\lambda + \frac{a}{2} \right)^2 = d \quad \text{mit } d = \frac{a^2}{4} - b$$

äquivalent.

Wir unterscheiden drei Fälle:

  – $d > 0$: (4.3) besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1 und λ_2:

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

  Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}}$$

  – $d = 0$: (4.3) besitzt genau eine reelle Nullstelle λ (mit Vielfachheit 2):

$$\lambda = -\frac{a}{2}$$

  Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda x}}$$

Beweis. Für $y(x) = x \cdot e^{\lambda x}$ folgt

$$y'(x) = (1 + \lambda x)e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y''(x) = (2\lambda + \lambda^2 x)e^{\lambda x}$$

und daher

$$\begin{aligned} y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) &= \left[2\lambda + \lambda^2 x + a \cdot (1 + \lambda x) + b \cdot x\right] e^{\lambda x} \\ &= \left[2\lambda + a + (\lambda^2 + a \cdot \lambda + b)x\right] e^{\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

□

– $d < 0$: (4.3) besitzt keine reellen Nullstellen. Dann erhält man die Lösungen

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot \sin(\beta x))}$$

mit

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{|d|} = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

- Inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$$

Wie im Fall linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung lässt sich oft für spezielle Funktionen $f(x)$, wie z.B. $f(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit $p(x) = x^n$ und $q(x) \in \{e^{\alpha x}, \sin(\beta x), \cos(\beta x)\}$ und Linearkombinationen solcher Funktionen, eine partikuläre Lösung der selben Form finden.

Beispiel 4.4. *Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung*

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x^2$$

durch einen geeigneten Ansatz und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.

Ansatz

$$y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Durch Einsetzen erhält man die Bedingung:

$$2a_2 - 2a_2 x - a_1 - 2a_2 x^2 - 2a_1 x - 2a_0 = 4x^2$$

Koeffizientenvergleich:

$$-2a_2 = 4, \quad -2a_2 - 2a_1 = 0, \quad 2a_2 - a_1 - 2a_0 = 0.$$

Daraus erhält man:

$$a_2 = -2, \quad a_1 = 2, \quad a_0 = -3, \quad \textit{also} \quad y_p(x) = -2x^2 + 2x - 3$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \quad \textit{also} \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

also

$$y_{hom}(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_p(x) + y_{hom}(x) = -2x^2 + 2x - 3 + c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-x}$$

Allgemeine Technik: Variation der Konstanten

Man wählt den Ansatz:

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x),$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei (unabhängige) Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind, und erhält

$$y_p'(x) = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

Wir fordern nun, dass

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$$

Dann folgt

$$y_p'(x) = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)$$

und

$$y_p''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x)$$

Also

$$\begin{aligned} y_p''(x) + a \cdot y_p'(x) + b \cdot y_p(x) &= c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) \\ &+ c_1(x) \cdot \underbrace{[y_1''(x) + a \cdot y_1'(x) + b\, y_1(x)]}_{=0} + c_2(x) \cdot \underbrace{[y_2''(x) + a \cdot y_2'(x) + b\, y_2(x)]}_{=0} \end{aligned}$$

Somit genügt es, $c_1(x)$ und $c_2(x)$ so zu wählen, dass

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Beispiel 4.5. *Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung*

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x^2$$

durch Variation der Konstanten und Berechnung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung.

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y_{hom}(x) = c_1 \cdot \underbrace{e^{2x}}_{y_1(x)} + c_2 \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_2(x)}$$

Ansatz

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot e^{2x} + c_2(x) \cdot e^{-x}$$

Bedingungen an $c_1(x)$ *und* $c_2(x)$*:*

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{2x} + c_2'(x) \cdot e^{-x} &= 0 \\ 2c_1'(x) \cdot e^{2x} - c_2'(x) \cdot e^{-x} &= 4x^2 \end{aligned}$$

Durch Addition folgt:

$$c_1'(x) = \frac{4}{3}x^2 e^{-2x} \quad \textit{und} \quad c_2'(x) = -c_1'(x)e^{3x} = -\frac{4}{3}x^2 e^x$$

Also (partielle Integration):

$$c_1(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}, \quad c_2(x) = -\frac{4}{3}(x^2 - 2x + 2)e^x$$

und somit

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}e^{2x} - \frac{4}{3}(x^2 - 2x + 2)e^x e^{-x} = -2x^2 + 2x - 3.$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = y_p(x) + y_{hom}(x) = -2x^2 + 2x - 3 + c \cdot e^{2x} + c \cdot e^{-x}$$

4.5 Zusatzbedingungen

Wir haben an Beispielen gesehen: Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Ordnung n besitzt n frei wählbare Parameter. In Anwendungen werden diese Parameter durch Zusatzbedingungen festgelegt:

- Anfangsbedingungen: Anfangswertproblem
  - Beispiel:

$$\begin{aligned} &x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t > 0, \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}$$

– Beispiel:

$$\begin{aligned} x''(t) &= f(t, x(t), x'(t)) \quad \text{für alle } t > 0, \\ x(0) &= x_0, \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

- Randbedingungen: Randwertproblem

  – Beispiel:

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)) \quad \text{für alle } x \in (a, b), \\ y(a) &= y_a, \\ y(b) &= y_b \end{aligned}$$

4.6 Einige Anwendungen

Beispiel 4.6. *Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v:*

$$x'(t) = v$$

$$x(t) = \int v \; dt = x_0 + v \cdot t$$

Beispiel 4.7. *Bewegung mit konstanter Beschleunigung a:*

$$x''(t) = a$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int a \; dt = v_0 + a \cdot t \\ x(t) &= \int (v_0 + a \cdot t) \; dt = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} t^2 \end{aligned}$$

Beispiel 4.8. *Ungedämpfter harmonischer Oszillator:*

$$mx''(t) = -kx(t).$$

Also

$$x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0, \quad d = -\frac{k}{m} < 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{|d|} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

Lösungen

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 \quad \textit{und} \quad x'(0) = v_0$$

erhält man:

$$c_1 = x_0, \quad \omega_0 \cdot c_2 = v_0, \quad \textit{also} \quad x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Beispiel 4.9. *Ungedämpfter harmonischer Oszillator mit periodischer Anregung:*

$$mx''(t) = -kx(t) + F_0 \cos(\omega t).$$

Partikuläre Lösung: Ansatz

$$x_p(t) = A \cos(\omega t)$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$m \left[-A\omega^2 \cos(\omega t)\right] + k A \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich:

$$-m\omega^2 A + k A = F_0.$$

Also, falls $\omega^2 \neq \frac{k}{m} = \omega_0^2$,

$$A = \frac{F_0}{k - m\,\omega^2} = \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \textit{und} \quad x'(0) = 0$$

erhält man:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right] \\ &= \frac{2F_0}{m\,(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \end{aligned}$$

Im Fall $\omega = \omega_0$ erhält man eine partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten:

$$x_p(t) = c_1(t)\,\cos(\omega_0\,t) + c_2(t)\,\sin(\omega_0\,t)$$

mit

$$\begin{aligned} c_1'(t)\cos(\omega_0\,t) + c_2'(t)\,\sin(\omega_0\,t) &= 0 \\ -\omega_0\,c_1'(t)\sin(\omega_0\,t) + \omega_0\,c_2'(t)\,\cos(\omega_0\,t) &= \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0\,t) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$c_1'(t) = -\frac{F_0}{m\,\omega_0}\cos(\omega_0\,t)\sin(\omega_0\,t) \quad \textit{und} \quad c_2'(t) = \frac{F_0}{m\,\omega_0}\cos^2(\omega_0\,t)$$

Also

$$c_1(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,\cos^2(\omega_0\,t) \quad \textit{und} \quad c_2(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,[\omega_0\,t + \sin(\omega_0\,t)\,\cos(\omega_0\,t)]$$

und daher

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0^2}\,[\omega_0\,t\,\sin(\omega_0\,t) + \cos(\omega_0\,t)]$$

Für die Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \textit{und} \quad x'(0) = 0$$

erhält man:

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\,\omega_0}\,t\,\sin(\omega_0\,t)$$

Kapitel 5

Komplexe Zahlen

- Die Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$.

  Sei $z = (x, y)$ eine komplexe Zahl.

  - x heißt Realteil von z, y heißt Imaginärteil von z. Schreibweise: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.
  - Grafische Darstellung als Punkt in der „komplexen“ Ebene. Die x-Achse heißt die reelle Achse, die y-Achse heißt die imaginäre Achse.
  - Alternative Schreibweisen einer komplexen Zahl $z = (x, y)$: $z = x + i\,y$, $z = x + y\,i$, $z = x + i \cdot y$, $z = x + y \cdot i$.
  - Für $x \in \mathbb{R}$ unterscheiden wir nicht zwischen x und $x + 0 \cdot i$, also nicht zwischen der reellen Zahl x und $(x, 0) \in \mathbb{C}$. In diesem Sinne gilt: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Operationen: Addition und Multiplikation von zwei komplexen Zahlen $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \end{aligned}$$

  Motivation: Bei Verwendung der alternativen Schreibweise $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$ und $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$ würde man für die Addition und Multiplikation erwarten, wenn man die üblichen Rechenregeln unterstellt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

  und, wenn man die zusätzliche Regel $i^2 = i \cdot i = -1$ vereinbart:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \cdot i^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \end{aligned}$$

- Man überprüft leicht, dass die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen die selben Rechenregeln erfüllen wie die Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

- Um die Subtraktion und die Division zweier komplexer Zahlen einführen zu können, muss man nur vereinbaren, was man unter $-z$ und $\frac{1}{z}$ versteht. Wir erwarten natürlich

$$z + (-z) = 0 \quad \text{und} \quad z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Wie man leicht nachrechnet, gelten diese Eigenschaften für jede Zahl $z = (x, y)$ mit

$$-z = (-x, -y) \quad \text{und für } z \neq 0: \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Subtraktion: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Multiplikation $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$.

- Mit den getroffenen Vereinbarungen gilt natürlich:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot i \quad \text{mit} \quad i = (0, 1).$$

und

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

- Zwei weitere wichtige Operationen für eine komplexe Zahl $z = (x, y) = x + y \cdot i$:

$$\bar{z} = (x, -y) = x - y \cdot i \quad \text{und} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\bar{z}$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl, $|z|$ heißt der Betrag von z. Man sieht sofort:

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2 \quad \text{und somit} \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

und

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

5.1 Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $d = \frac{p^2}{4} - q < 0$. Dann besitzt die Gleichung

$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$

keine reelle Lösung.

- Spezialfall: $p = 0$, $q = 1$, also

$$z^2 + 1 = 0$$

Mit $z = (x, y)$ erhält man

$$(x^2 - y^2, 2xy) + 1 = 0$$

Also

$$x^2 - y^2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad 2xy = 0$$

Lösungen:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = \pm 1 \quad \text{also} \quad z = \pm i.$$

- Allgemeiner Fall ($p, q \in \mathbb{R}$)

$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$

$\iff$

$$z^2 + p \cdot z + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = 0$$

$\iff$

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0$$

$\iff$

$$\left(\frac{z + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1 = 0$$

$\iff$

$$\frac{z + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = \pm i$$

$\iff$

$$z = -\frac{p}{2} \pm i \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

5.2 Erweiterung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$

Wir betrachten die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Für $x = i\,y$, dann erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (iy)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (iy)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1}$$

Das motiviert die folgende Erweiterung der Exponentialfunktion

Definition 5.1. *1. Für rein imaginäre Zahlen:*

$$e^{iy} = \cos y + i\,\sin y$$

2. Für komplexe Zahlen $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i\,\sin y).$$

Es gelten analoge Rechenregeln wie im reellen Fall, z.B.:

$$\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}}. \tag{5.1}$$

Das folgt leicht aus der entsprechenden Eigenschaft der reellen Exponentialfunktion und der Additionstheoreme der Winkelfunktionen.

Weitere Rechenregeln:

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\boxed{\left|e^{i\,x}\right| = 1}$$

- Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\boxed{\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)} \quad \text{und} \quad \boxed{\sin x = \frac{1}{2\,i}\left(e^{i\,x} - e^{-i\,x}\right)}$$

Die Hyperbelfunktionen wurden mit Hilfe der Exponentialfunktion eingeführt. Daher lassen sie sich ebenfalls auf $\mathbb{C}$ erweitern. Die obige Darstellung der Winkelfunktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion erlaubt es auch, die Winkelfunktionen auf $\mathbb{C}$ zu erweitern.

Definition 5.2.

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \quad \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{i\,z} + e^{-i\,z}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2\,i}\left(e^{i\,z} - e^{-i\,z}\right) \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{C}.$$

5.3 Polarform

Satz 5.1. *Jede komplexe Zahl $z = x + i\,y \neq 0$ lässt sich folgendermaßen darstellen:*

$$z = r \cdot e^{i\,\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \tag{5.2}$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \textit{und} \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{für } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \textit{für } x < 0,\ y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \textit{für } x < 0,\ y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \textit{für } x = 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Die Darstellung ist im folgenden Sinne eindeutig: Falls für ein $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung (5.2) *für $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt, dann folgt*

$$r = |z| \quad \textit{und} \quad \varphi = \arg(z) + 2k\pi \quad \textit{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Untersuchung von Lösungen $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ der Gleichungen

$$r \cdot \cos\varphi = x, \quad r \cdot \sin\varphi = y$$

für gegebene Werte $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \neq 0$.

Bestimmung von r:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = r^2, \quad \text{also} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Bestimmung von $\varphi \in (-\pi, \pi]$: Sei $x \neq 0$. Notwendige Bedingung:

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}. \tag{5.3}$$

Dafür gibt es folgende Lösungen in $(-\pi, \pi]$:

$$\arctan\frac{y}{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und zusätzlich

$$\arctan\frac{y}{x} - \pi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ falls } \frac{y}{x} > 0. \qquad \arctan\frac{y}{x} + \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ falls } \frac{y}{x} \leq 0,$$

Aus (5.3) folgt:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \tan^2\varphi} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{\tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Also

$$r\,|\cos\varphi| = |x|, \quad r\,|\sin\varphi| = |y|.$$

Bis auf das Vorzeichen sind also die Gleichungen erfüllt. Welche der 3 Kandidaten für φ die richtigen Vorzeichen ergeben, ist einfach zu überprüfen. Der Sonderfall $x = 0$ lässt sich leicht überprüfen. $\square$

Beispiel: Einheitswurzeln. Mit Hilfe der Polarform lassen sich leicht die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

für $n \in \mathbb{N}$ bestimmen. Mit $z = r \cdot e^{i\varphi}$ erhalten wir aus (5.1)

$$r^n \cdot e^{i\,n\,\varphi} = 1.$$

Also

$$r^n = 1 \quad \text{und} \quad n\,\varphi = 2k\pi. \quad \text{d.h.} \quad r = 1 \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n}.$$

Lösungen

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5.4 Erweiterung der Ableitung

Der Begriff der Ableitung lässt sich auf Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ erweitern:

Definition 5.3. *Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in X$ ein nicht-isolierter Punkt. Dann heißt f im Punkt x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt Ableitung von f in x_0.

Es gelten die analogen Rechenregeln: Additionsregel, Produktregel, ...

Folgerung: Die Ableitung von $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ und $f(x) = g(x) + i\,h(x)$ mit $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $h\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$f'(x) = g'(x) + i\,h'(x).$$

gegeben.

Beispiel: Für die Ableitung der Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= [e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x))]' \\ &= (e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x))' + i\,(e^{\alpha x} \sin(\beta\,x))' \\ &= \alpha\,e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x) - \beta\,e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta\,x) + i\,[\alpha\,e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta\,x) + \beta\,e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta\,x)] \\ &= (\alpha + i\,\beta) \cdot e^{\alpha x} \cdot (\cos(\beta\,x) + i\,\sin(\beta\,x)) = \lambda\,y(x). \end{aligned}$$

Also gilt auch für $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda \cdot e^{\lambda x}}$$

5.5 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung: Nachtrag

Durch Exponentialansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ führt (wie im reellen Fall) zu Lösungen, falls λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$

ist. Für den Fall $b > \frac{a^2}{4}$ erhalten wir ein Paar konjugiert komplexer Lösungen:

$$\lambda_1 = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{=\alpha} + i \underbrace{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}_{=\beta} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{=\alpha} - i \underbrace{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}_{=\beta}$$

Nach dem Superpositionsprinzip erhalten wir damit Lösungen der Form

$$y(x) = c_1\, e^{\lambda_1\, x} + c_2\, e^{\lambda_2\, x}$$

Im Speziellen erhält man die Lösungen:

$$\frac{1}{2}(e^{\lambda_1\, x} + e^{\lambda_2 x}) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)\, x} + e^{(\alpha-i\beta)\, x}) = e^{\alpha\, x}\, \frac{1}{2}(e^{i\beta\, x} + e^{-i\beta\, x}) = e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1\, x}\right)$$

$$\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1\, x} - e^{\lambda_2 x}) = \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+i\beta)\, x} - e^{(\alpha-i\beta)\, x}) = e^{\alpha\, x}\, \frac{1}{2i}(e^{i\beta\, x} - e^{-i\beta\, x}) = e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1\, x}\right)$$

und damit auch alle Linearkombinationen als Lösungen:

$$y(x) = e^{\alpha\, x}\, (\tilde{c}_1\, \cos(\beta\, x) + \tilde{c}_2\, \sin(\beta\, x))$$

Kapitel 6

Mehrdimensionale Differentialrechnung

6.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller reellen Spaltenvektoren:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Operationen:

- Addition und skalare Multiplikation mit $c \in \mathbb{R}$:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad c\, x = c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\, x_1 \\ c\, x_2 \\ \vdots \\ c\, x_n \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt:

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n \in \mathbb{R}$$

- Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$:

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\, y_3 - x_3\, y_2 \\ x_3\, y_1 - x_1\, y_3 \\ x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

- Norm:
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$
Es gelten folgende Eigenschaften der Norm:

  1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
  2. Homogenität: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$\|c\,x\| = |c|\,\|x\|$$
  3. Dreiecksungleichung
  $$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}^n$. Vereinbarung: Der Definitionsbereich X ist stets eine offene Menge, d.h. zu jedem Element x von X gibt es eine Umgebung $K_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon \|y - x\| < r\}$, die ebenfalls noch in X liegt. (Jedes Element x von X ist ein innerer Punkt.)
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$
Die Funktionen $f_i\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ heißen die Komponentenfunktionen von f.

  Vereinbarung zur Schreibweise: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist gleichbedeutend mit $f(x)$, auch wenn x ein Spaltenvektor ist.

- Graphische Darstellung von mehrdimensionalen Funktionen.

  1. $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$: Graph, Niveaulinien in $\mathbb{R}^2$.
  Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$.
  2. $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$: Niveauflächen in $\mathbb{R}^3$.
  Beispiel: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
  3. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$: (Graph,) Bildmenge als parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^2$.
  Beispiel: $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
  4. $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$: Bildmenge als parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^3$.
  Beispiel: $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$

5. $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$: Bildmenge als parametrisierte Oberfläche in $\mathbb{R}^3$ oder Gitterlinienbild der Bildmenge in $\mathbb{R}^3$.

   Beispiel: $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$.
6. $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$: Richtungsfeld

   Beispiel: $f(x) = -G\,\dfrac{m_1\,m_2}{\|x\|^2}\,x$.

6.2 Ableitungsbegriffe

Definition 6.1. *Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt x partiell nach x_j differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+t,x_{j+1}\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j,x_{j+1}\ldots,x_n)\Big)\end{aligned}$$

existiert. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^m$ *heißt die partielle Ableitung von f nach x_i in x.*

Alternative Schreibweise: $f_{x_j}(x)$. Problematik dieser Schreibweisen: Man muss Namen für die einzelnen Variablen vereinbaren.

Schreibweisen ohne Namensvereinbarung: $\partial_j f(x)$, $D_j f(x)$.

Offensichtlich lassen sich partielle Ableitungen komponentenweise berechnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}$$

Definition 6.2. *Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in X$ stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung von x_0 existieren und im Punkt x_0 stetig sind.*

Für stetig differenzierbare Funktionen gilt eine ähnliche Darstellung wie in (2.1). Der Einfachheit halber betrachten wir stetig differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$: Nach dem (eindimensionalen) Satz von Taylor gilt:

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\\
&\quad= f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)\\
&\quad= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\,h,y_0)\,h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_2\,k)\,k\\
&\quad= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k+r(h,k)
\end{aligned}$$

mit

$$r(h,k)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\,h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]\,h+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_2\,k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\,k.$$

Die Funktion f lässt sich also folgendermaßen schreiben:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+A(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+r(h,k)$$

Dabei ist A der folgende Zeilenvektor

$$A(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

und der Ausdruck $A(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ ist als (Matrix-)Produkt des Zeilenvektors $A(x_0,y_0)$ und des Spaltenvektors $\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ zu verstehen:

$$ab=a_1\,b_1+a_2\,b_2 \quad \text{für } a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}.$$

Für das Restglied gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{|r(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \Bigg|\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\,h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&\qquad+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_2\,k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\cdot\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\Bigg|.\\
&\le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\,h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\cdot\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&\qquad+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_2\,k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\cdot\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&\le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\,h,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_2\,k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|\\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für } h,k\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Völlig analog lässt sich für stetig differenzierbare Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ zeigen:

$$f_i(x_0+h) = f_i(x_0) + A_i(x_0)h + r_i(h) \quad \text{für } i = 1,2,\ldots,m$$

mit

$$A_i(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r_i(h)}{\|h\|} = 0.$$

Der Ausdruck $A_i(x_0)h$ ist als (Matrix-)Produkt des Zeilenvektors $A_i(x_0)$ und des Spaltenvektors h zu verstehen:

$$ab = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \ldots + a_n\, b_n \quad \text{für } a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Fasst man diese komponentenweise Darstellung zusammen, so erhält man

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A(x_0)h + r(h) \quad \text{mit } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \tag{6.1}$$

und der $m \times n$ Matrix

$$A(x_0) = \begin{pmatrix} A_1(x_0) \\ A_2(x_0) \\ \vdots \\ A_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Der Ausdruck $A(x_0)h$ ist als (Matrix-)Produkt der $m \times n$ Matrix $A(x_0)$ und des Spaltenvektors $h \in \mathbb{R}^n$ zu verstehen:

$$Ab = \begin{pmatrix} A_1 b \\ A_2 b \\ \vdots \\ A_m b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei wurde $\mathbb{R}^{m\times n}$ zur Bezeichnung aller reellen $m \times n$ Matrizen verwendet. Die Menge $\mathbb{R}^n$ von Spaltenvektoren stimmt dann mit $\mathbb{R}^{n\times 1}$ überein. $\mathbb{R}^{1\times n}$ ist eine Menge von Zeilenvektoren.

Das Produkt Ab lässt sich auch mit Hilfe der Spaltenvektoren der Matrix A darstellen:

$$Ab = b_1 A_1' + b_2 A_2' + \cdots + b_n A_n' \in \mathbb{R}^m \text{ für } A = \begin{pmatrix} A_1' & A_2' & \cdots & A_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 6.3. *Die in (6.2) gegebene Matrix $A(x_0)$ heißt die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x_0.*

Bezeichungsweise: $A(x_0) = J(x_0)$.
Wie man sofort sieht, kann man die Jacobi-Matrix auch folgendermaßen schreiben:

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Für $m = 1$ erhält man für die Jacobi-Matrix einen Zeilenvektor.
Die Darstellung (6.1) ist Anlass zu folgender Definition:

Definition 6.4. *Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar (oder auch total differenzierbar), falls es eine Matrix $A(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, sodass*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(x_0)\, h + r(h) \quad \textit{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Es lässt sich leicht nachweisen, dass es höchstens eine solche Matrix $A(x_0)$ geben kann (vergleiche mit Satz 2.1). Die Matrix $A(x_0)$ heißt die Ableitung (oder auch die totale Ableitung oder die Fréchet-Ableitung) von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ (oder auch mit $Df(x_0)$) bezeichnet.

Geometrische Interpretation für $n = 2$ und $m = 1$: Der Graph der Funktion $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0.

Wir haben also im Sinne dieser Begriffe vorhin folgende Aussage bewiesen:

Satz 6.1. *Falls $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in X$ stetig differenzierbar ist, dann ist f im Punkt x_0 differenzierbar und die Ableitung $f'(x_0)$ stimmt mit der Jacobi-Matrix $J(x_0)$ überein.*

Also gilt offensichtlich:

$$f'(x_0) = J(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Definition 6.5. *Richtungsableitung: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$.*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x + t\,v) - f(x)\Big)$$

Alternative Schreibweisen: $D_v f(x)$, $f_v(x)$.

Satz 6.2. *Falls $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar ist, dann existieren alle Richtungsableitungen im Punkt x_0 und es gilt:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0)\,v.$$

Beweis. Wenn f im Punkt x_0 differenzierbar ist, dann gilt $(h = tv)$

$$f(x_0 + t\,v) = f(x_0) + t\,f'(x_0)v + r(t\,v)$$

und somit

$$\lim_{t \to 0}\left[\frac{1}{t}(f(x_0 + t\,v) - f(x_0)) - f'(x_0)v\right] = \lim_{t \to 0}\frac{r(t\,v)}{t} = \lim_{t \to 0}\frac{r(t\,v)}{\|t\,v\|}\,\frac{|t|}{t}\,\|v\| = 0.$$

□

Definition 6.6. 1. *Für $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den Gradienten von f durch:*

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

2. *Für $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert man die Divergenz von f durch:*

$$\operatorname{div} f(x) = \nabla \cdot f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}$$

3. *Für $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $X \subset \mathbb{R}^3$ definiert man die Rotation von f durch:*

$$\operatorname{rot} f(x) = \nabla \times f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Es gilt offensichtlich:

$$\operatorname{grad} f(x) = f'(x)^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x)v = \operatorname{grad} f(x) \cdot v.$$

und

$$\operatorname{div} f(x) = \operatorname{Spur} f'(x), \quad \Omega(\operatorname{rot} f(x)) = f'(x) - f'(x)^T$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

1. Sei $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Elementen m_{ij} in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte, kurz $M = (m_{ij})$. Dann bezeichnet $M^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die transponierte Matrix, deren Elemente m'_{ij} durch
$$m'_{ij} = m_{ji}$$
gegeben sind.

2. Die Spur eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist durch
$$\mathrm{Spur}(M) = m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{nn} \in \mathbb{R}$$
gegeben.

3. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit Komponenten v_i, kurz $v = (v_i)$, ist die Matrix $\Omega(v)$ durch
$$\Omega(v) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
gegeben. Es gilt: $x \times y = \Omega(x)y = -\Omega(y)x$.

6.3 Differentiationsregeln

Rechenregeln für die partiellen Ableitungen ergeben sich direkt aus den entsprechenden Rechenregeln im Eindimensionalen.

Für (total) differenzierbare Funktionen gelten analoge Rechenregeln wie im Eindimensionalen. Dazu benötigen wir die folgenden Operationen für Matrizen:

1. Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Summe $A + B$ beziehungsweise das Produkt cA sind jene Matrizen in $\mathbb{R}^{m\times n}$, deren Elemente m_{ij} durch
$$m_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{bzw.} \quad m_{ij} = c\, a_{ij}$$
gegeben sind.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ mit den Zeilenvektoren A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ und sei $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ mit den Spaltenvektoren B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Das Produkt AB ist dann folgendermaßen definiert:
$$AB = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \ldots & AB_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & & A_1B_n \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & & A_mB_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$
Also: $(AB)_{ij} = A_iB_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Satz 6.3 (Linearität). *Seien* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *mit* $X \subset \mathbb{R}^n$ *(im Punkt* $x_0 \in X$*) differenzierbar und sei* $c \in \mathbb{R}$*. Dann sind* $f+g$ *und* cf *(im Punkt* $x_0 \in X$*) differenzierbar und es gilt (für* $x = x_0$*):*

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x)\\ (cf(x))' &= cf'(x)\end{aligned}$$

Beweis. Erste Identität: Aus

$$\begin{aligned}f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+r_f(h)\\ g(x_0+h) &= g(x_0)+g'(x_0)h+r_g(h)\end{aligned}$$

folgt durch Addition:

$$\begin{aligned}f(x_0+h)+g(x_0+h) &= \Big[f(x_0)+f'(x_0)h+r_f(h)\Big]+\Big[g(x_0)+g'(x_0)h+r_g(h)\Big]\\ &= f(x_0)+g(x_0)+\Big[f'(x_0)+g'(x_0)\Big]h+r_{f+g}(h)\end{aligned}$$

mit $r_{f+g}(h) = r_f(h)+r_g(h)$. Man sieht sofort, dass $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r_{f+g}(h)}{\|h\|} = 0$. Also ist $f(x)+g(x)$ im Punkt x_0 differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0)+g'(x_0)$. □

Satz 6.4 (Produktregeln). *Seien* $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *mit* $X \subset \mathbb{R}^n$ *(im Punkt* $x_0 \in X$*) differenzierbar. Dann sind* φf *und* $f\cdot g$ *(im Punkt* $x_0 \in X$*) differenzierbar und es gilt (für* $x = x_0$*):*

$$\begin{aligned}(\varphi(x)\,f(x))' &= f(x)\,\varphi'(x)+\varphi(x)\,f'(x)\\ (f(x)\cdot g(x))' &= g(x)^T\,f'(x)+f(x)^T\,g'(x).\end{aligned}$$

Für $n = m = 3$ *ist* $f \times g$ *(im Punkt* $x_0 \in X$*) differenzierbar und es gilt (für* $x = x_0$*):*

$$(f(x)\times g(x))' = -\Omega(g(x))\,f'(x)+\Omega(f(x))\,g'(x) = \Omega(g(x))^T\,f'(x)+\Omega(f(x))\,g'(x)$$

Beweis. Erste Identität. Aus

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+h) &= \varphi(x_0)+\varphi'(x_0)h+r_\varphi(h)\\ f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+r_f(h)\end{aligned}$$

folgt durch Multiplikation:

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+h)f(x_0+h) &= \Big[\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)h+r_\varphi(h)\Big]\Big[f(x_0)+f'(x_0)h+r_f(h)\Big]\\ &= \varphi(x_0)f(x_0)+\Big[f(x_0)\varphi'(x_0)+\varphi(x_0)f'(x_0)\Big]h+r_{\varphi f}(h)\end{aligned}$$

mit

$$r_{\varphi f}(h) = r_\varphi(h)\Big[f(x_0)+f'(x_0)h\Big]+\Big[\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)h\Big]r_f(h)+r_\varphi(h)r_f(h)$$

Man sieht sofort, dass $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{r_{\varphi f}(h)}{\|h\|} = 0$. Also ist $\varphi(x)f(x)$ im Punkt x_0 differenzierbar mit der Ableitung $f(x_0)\varphi'(x_0)+\varphi(x_0)f'(x_0)$. □

Als Spezialfälle der Produktregeln erhält man für $\gamma \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^m$:

$$(\gamma\, f(x))' = \gamma\, f'(x), \quad (c \cdot f(x))' = c^T f'(x) \quad \text{und für } m = n = 3 \quad (c \times f(x))' = \Omega(c)\; f'(x).$$

Satz 6.5 (Kettenregel)**.** *Seien $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ (im Punkt $x_0 \in X$) und $f\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$ mit $g(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ (im Punkt $g(x_0) \in Y$) differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ (im Punkt $x_0 \in X$) differenzierbar und es gilt (für $x = x_0$):*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

Beweis. Es gilt:

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + k \quad \text{mit } k = g'(x_0)h + r_g(h)$$

und

$$\begin{aligned} f(g(x_0 + h)) &= f(g(x_0) + k) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))k + r_f(k) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\Big[g'(x_0)h + r_g(h)\Big] + r_f(k) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\, g'(x_0)h + r_{f\circ g}(h) \end{aligned}$$

mit

$$r_{f\circ g}(h) = f'(g(x_0))\, r_g(h) + r_f(g'(x_0)h + r_g(h))$$

Man sieht leicht, dass $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_{f\circ g}(h)}{\|h\|} = 0$. Also ist $f(g(x))$ im Punkt x_0 differenzierbar mit der Ableitung $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

Die Kettenregel kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}[f(g(x))] \quad \tfrac{\partial}{\partial x_2}[f(g(x))] \quad \cdots \quad \tfrac{\partial}{\partial x_n}[f(g(x))]\right) \\ &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial y_1}(y) \quad \tfrac{\partial f}{\partial y_2}(y) \quad \cdots \quad \tfrac{\partial f}{\partial y_m}(y)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit } y = g(x) \end{aligned}$$

Also gilt durch Vergleich der Spalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}[f(g(x))] &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial y_1}(y) \quad \tfrac{\partial f}{\partial y_2}(y) \quad \cdots \quad \tfrac{\partial f}{\partial y_m}(y)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit } y = g(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x))\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f}{\partial y_2}(g(x))\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(x))\frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

Anwendung der Kettenregel: Variablentransformationen

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$: Jeder Punkt $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\varphi \\ y &= r\,\sin\varphi \end{aligned}$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$ darstellen.

Die Abbildung $T\colon [0,\infty)\times(-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben. T ist differenzierbar und es gilt:

$$T'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Wir betrachten eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, die die Verteilung einer physikalische Größe in der Ebene beschreibt. Die Variablen seien die kartesischen Koordinaten x und y, der dazugehörige Funktionswert ist $f(x,y)$. Will man diesselbe physikalische Größe in Abhängigkeit der Polarkoordinaten darstellen, so führt das auf die Funktion g, die durch

$$g(r,\varphi) = f(x,y) \quad \text{mit} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r,\varphi), \text{ also} \quad g(r,\varphi) = f(T(r,\varphi))$$

gegeben ist. (In der Praxis wird meist auch g mit dem gleichen Funktionsnamen f bezeichnet.)

Aus der Kettenregel folgt:

$$g'(r,\varphi) = f'(T(r,\varphi))T'(r,\varphi) = f'(x,y)T'(r,\varphi) \quad \text{mit } (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

Daraus folgt (für $r \neq 0$)

$$f'(x,y) = g'(r,\varphi)T'(r,\varphi)^{-1}$$

mit der Inversen von $T'(r,\varphi)$, die durch

$$T'(r,\varphi)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\,\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Durch Transposition erhält man folgende Transformationsformel:

Gradient:

$$\boxed{\nabla_{(x,y)}f(x,y)} = f'(x,y)^T = T'(r,\varphi)^{-T}g'(r,\varphi)^T \boxed{= T'(r,\varphi)^{-T}\nabla_{(r,\phi)}g(r,\varphi)}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & -\sin\varphi \\ r\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

Im Detail:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos\varphi \,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \sin\varphi \,\frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)
\end{aligned}$$

Auf analoge Weise lassen sich andere Differentialoperatoren transformieren:

Divergenz:

$$\begin{aligned}
\boxed{\nabla_{(x,y)} \cdot F(x,y)} &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\\
&= \cos\varphi \,\frac{\partial G_1}{\partial r}(r,\varphi) - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial G_1}{\partial \varphi}(r,\varphi) + \sin\varphi\,\frac{\partial G_2}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial G_2}{\partial \varphi}(r,\varphi)\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\cos\varphi\, G_1(r,\varphi) + r\sin\varphi\, G_2(r,\varphi)\Big] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big[-\sin\varphi\, G_1(r,\varphi) + \cos\varphi\, G_2(r,\varphi)\Big]\\
&\boxed{= \frac{1}{r}\,\nabla_{(r,\varphi)} \cdot \Big[r\,T'(r,\varphi)^{-1}G(r,\varphi)\Big]}
\end{aligned}$$

mit

$$G(r,\phi) = F(x,y),\ G_1(r,\varphi) = F_1(x,y),\ G_2(r,\varphi) = F_2(x,y) \text{ mit } (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Rechenregeln für grad**,** div **und** rot

Einige Beispiele: Für Skalarfelder $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und Vektorfelder $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\nabla(\varphi(x) + \psi(x)) &= \nabla\varphi(x) + \nabla\psi(x)\\
\nabla(\varphi(x)\,\psi(x)) &= \psi(x)\,\nabla\varphi(x) + \varphi(x)\,\nabla\psi(x)\\
\nabla(f(x)\cdot g(x)) &= f'(x)^T g(x) + g'(x)^T f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(f(x) + g(x)) &= \nabla\cdot f(x) + \nabla\cdot g(x)\\
\nabla\cdot(\varphi(x) f(x)) &= \nabla\varphi(x)\cdot f(x) + \varphi(x)\,\nabla\cdot f(x)
\end{aligned}$$

für $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(f(x)\times g(x)) &= g(x)\cdot\nabla\times f(x) - f(x)\cdot\nabla\times g(x)\\
\nabla\times(f(x) + g(x)) &= \nabla\times f(x) + \nabla\times g(x)\\
\nabla\times(\varphi(x)\,f(x)) &= \nabla\,\varphi(x)\times f(x) + \varphi(x)\,\nabla\times f(x)\\
\nabla\times(f(x)\times g(x)) &= f'(x)g(x) - (\nabla\cdot f(x))\,g(x) + (\nabla\cdot g(x))\,f(x) - g'(x)f(x)
\end{aligned}$$

Diese Rechenregeln lassen sich leicht durch komponentenweise Betrachtungen beweisen, z.B. gilt:

$$\begin{aligned}\Big[\nabla(f(x)\cdot g(x))\Big]_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n f_j(x)g_j(x)\right)\\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)g_j(x) + f_j(x)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)\right)\end{aligned}$$

und

$$\Big[f'(x)^T g(x) + g'(x)^T f(x)\Big]_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)g_j(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)f_j(x),$$

woraus sofort die Identität

$$\nabla(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)^T g(x) + g'(x)^T f(x)$$

folgt.

Alternative Schreibweisen: $f'(x) = \nabla f(x)$ und

$$f'(x)g(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g_j(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = (g(x)\cdot\nabla)f(x).$$

und analog $g'(x) = \nabla g(x)$, $g'(x)f(x) = (f(x)\cdot\nabla)g(x)$.

6.4 Ableitungen höherer Ordnung und der Satz von Taylor

- Partielle Ableitungen 2. Ordnung für $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$:

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

  Alternative Schreibweise: f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}.

  Nicht in allen Fällen stimmen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ überein. Es gilt allerdings:

  Satz 6.6 (Schwarz)**.** *Falls für $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ existieren und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ im Punkt (x_0, y_0) stetig ist, dann existiert auch $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0)$ und es gilt*

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0, y_0)$$

- Hesse-Matrix:
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$
Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes ist $H_f(x,y)$ eine symmetrische Matrix.
Analoge Erweiterung für Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$.
$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

- Laplace-Operator für Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$:
$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$
Es gilt
$$\Delta f(x) = \operatorname{div}\operatorname{grad} f(x) = \nabla \cdot \nabla f(x) \quad \text{und} \quad \Delta f(x) = \operatorname{Spur} H_f(x).$$
Erweiterung auf Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ durch komponentenweise Anwendung.

Laplace-Operator in Polarkoordinaten:
$$\begin{aligned} \Delta_{(x,y)} f(x,y) &= \nabla_{(x,y)} \cdot \left[\nabla_{(x,y)} f(x,y) \right] \\ &= \frac{1}{r} \nabla_{(r,\varphi)} \cdot \left[r\, T'(r,\varphi)^{-1} T'(r,\varphi)^{-T} \nabla_{(r,\varphi)} g(r,\varphi) \right] \end{aligned}$$
Es gilt
$$r\, T'(r,\varphi)^{-1} T'(r,\varphi)^{-T} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & -\sin\varphi \\ r\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$
Also
$$\boxed{\Delta_{(x,y)} f(x,y)} = \frac{1}{r} \nabla_{(r,\varphi)} \cdot \left[\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \nabla_{(r,\varphi)} g(r,\varphi) \right] \boxed{= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)}$$
$$\boxed{= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)}$$

- Der Satz von Taylor für $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$: Für

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\,h)$$

folgt:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

Nun gilt:

$$\varphi(1) = f(x_0 + h), \quad \varphi(0) = f(x_0),$$

und

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + th)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + th)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + th)\,h_2$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + th)\right)' h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0 + th)\right)' h_2 \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + th)\,h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0 + th)\,h_2\right) h_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + th)\,h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + th)\,h_2\right) h_2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + th)\,h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + th)\,h_1\,h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + th)\,h_2^2
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
\varphi'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}(x_0 + th)\,h_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_0 + th)h_1^2\,h_2 \\
+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}(x_0 + th)\,h_1\,h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(x_0 + th)\,h_2^3
\end{aligned}$$

u.s.w.

Allgemein gilt:

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i}(x_0 + th)\,h_1^{k-i} h_2^i$$

und daher

$$\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(k-i)!i!}\,\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i}(x_0)\,h_1^{k-i} h_2^i = \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = k}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!}\,\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0)\,h_1^{i_1} h_2^{i_2}$$

Satz 6.7. *Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^2$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $x_0, h \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 + t\,h \in X$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gibt es zu $x = x_0 + h$ eine Zahl $\theta \in (0,1)$, sodass:*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = k}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2} \\
&\quad + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + i_2 = n+1}} \frac{1}{(i_1)!(i_2)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(x_0 + \theta h)\, h_1^{i_1} h_2^{i_2}
\end{aligned}
$$

Multi-Index-Schreibweise:

$$
i = (i_1, i_2), \quad |i| = i_1 + i_2, \quad ,i! = i_1!\, i_2!, \quad h^i = h_1^{i_1}\, h_2^{i_2}, \quad \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i} = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}
$$

Taylor-Formel:

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|i|=k} \frac{1}{i!} \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i}(x_0)\, (x - x_0)^i + \sum_{|i|=n+1} \frac{1}{i!} \frac{\partial^{|i|} f}{\partial x^i}(x_0 + \theta\, h)\, (x - x_0)^i
$$

Erweiterung für mehr als 2 Unbekannte: völlig analog.

6.5 Lokale Extrema

- Geometrische Bedeutung von $\operatorname{grad} f(x)$:

$$
\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \operatorname{grad} f(x) \cdot v
$$

Also gilt für v mit $\|v\| = 1$:

$$
\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x) \right| \le \|\operatorname{grad} f(x)\|
$$

und

$$
\left| \frac{\partial f}{\partial v_0}(x) \right| = \|\operatorname{grad} f(x)\| \quad \text{für } v_0 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \operatorname{grad} f(x).
$$

$\operatorname{grad} f(x)$ ist also die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f im Punkt x.

- Notwendige Bedingung für ein Extremum:

Satz 6.8. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in X$ und f ist in diesem Punkt differenzierbar. Dann gilt: Falls x_0 ein lokales Extremum ist, folgt*

$$
\operatorname{grad} f(x_0) = 0
$$

Beweis. Wie in $\mathbb{R}$ folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0 \quad \text{für alle Richtungen } v \in \mathbb{R}^n$$

Aus

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v$$

folgt die Behauptung. □

Definition 6.7. *Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt M positiv (negativ) definit, wenn*

$$x^T M x > 0 \ (< 0) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n \textit{ mit } x \neq 0.$$

Wir diskutieren positiv definite Matrizen.

Fall $n = 1$:

$$M = m_{11}, \quad x^T M x = m_{11} x_1^2 > 0 \Longleftrightarrow m_{11} > 0.$$

Fall $n = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad m_{21} = m_{12}.$$

$$x^T M x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = m_{11} x_1^2 + 2m_{12} x_1 x_2 + m_{22} x_2^2$$

Für $x_2 = 0$ muss $x_1 \neq 0$ gelten und man erhält die Bedingung

$$m_{11} x_1^2 > 0, \quad \text{also} \quad m_{11} > 0.$$

Für $x_2 \neq 0$ erhält man nach Division durch x_2^2 die Bedingung

$$m_{11} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 2m_{12} \left(\frac{x_1}{x_2}\right) + m_{22} > 0$$

Das ist genau dann der Fall, wenn die quadratische Gleichung

$$m_{11} z^2 + 2m_{12} z + m_{22} = 0$$

keine reelle Nullstelle besitzt, also wenn

$$4m_{12}^2 - 4m_{11} m_{22} < 0, \quad \text{also} \quad m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} > 0.$$

M ist also genau dann positiv definit, wenn

$$m_{11} > 0 \quad \text{und} \qquad m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} > 0$$

Völlig analog folgt: M ist also genau dann negativ definit, wenn

$$m_{11} < 0 \quad \text{und} \qquad m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} > 0$$

Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum:

Satz 6.9. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in X$ mit*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad H_f(x_0) \textit{ ist positiv (negativ) definit.}$$

Dann ist x_0 ein lokales Minimum (Maximum).

Beweis. Wir führen der Einfachheit halber den Beweis nur für $n = 2$ und für $H_f(x_0)$ positiv definit. (Der allgemeine Fall wird völlig analog bewiesen.) Aus dem Satz von Taylor erhält man

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(x_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\, h_2 \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0 + \theta\, h)\, h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + \theta\, h)\, h_1\, h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0 + \theta\, h)\, h_2^2\right] \\ &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}\, h^T H_f(x_0 + \theta\, h) h \end{aligned}$$

Da f 2-mal stetig differenzierbar ist und $H_f(x_0)$ positiv definit ist, ist auch $H_f(x)$ in einer Umgebung von x_0 positiv definit. Dann gilt für $x \neq x_0$ aus dieser Umgebung:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=0} \cdot h + \frac{1}{2}\, \underbrace{h^T H_f(x_0 + \theta\, h) h}_{>0} > f(x_0).$$

□

Kapitel 7

Mehrdimensionale Integralrechnung

7.1 Kurvenintegrale

7.1.1 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Definition 7.1. *Eine stetige Funktion* $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *heißt Parameterdarstellung einer Kurve in* $\mathbb{R}^n$ *mit Anfangspunkt* $\gamma(a)$ *und Endpunkt* $\gamma(b)$.

Andere Bezeichnungen für Parameterdarstellung einer Kurve: parametrisierte Kurve, Weg. Die Bildmenge $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ wird gelegentlich auch Bogen genannt.

Ist γ differenzierbar und gilt $\gamma'(t) \neq 0$, dann lässt sich $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ als Tangentenvektor der Bildmenge im Punkt $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ interpretieren.

Definition 7.2. *Für* $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *und* $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *gelte:*

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s)) \quad \textit{für alle } s \in [c,d]$$

mit einer stetigen und streng monoton wachsenden Funktion $\phi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *mit* $\phi(c) = a$ *und* $\phi(d) = b$. *Dann heißen* γ_1 *und* γ_2 *äquivalente Parameterdarstellungen.*

Mathematisch formal: Eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven heißt eine Kurve. Das bedeutet: Eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ besteht aus einer Teilmenge aus $\mathbb{R}^n$, der Bildmenge einer konkreten Parameterdarstellung (von vielen möglichen äquivalenten Parameterdarstellungen) und einem Durchlaufsinn, ausgedrückt durch eine konkrete Parameterdarstellung (von vielen möglichen äquivalenten Parameterdarstellungen).

- Eine Kurve heißt eine **Jordan-Kurve**, falls es eine Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, sodass γ auf $[a,b)$ injektiv ist.
- Eine Kurve heißt **stetig differenzierbar**, wenn es eine Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, die stetig differenzierbar ist.
- Stimmt der Anfangspunkt mit dem Endpunkt überein, spricht man von einer **geschlossenen Kurve**.

- Sei C eine Kurve. Dann bezeichnet $-C$ die Kurve mit entgegengesetztem Durchlaufsinn: Wenn $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung der Kurve C ist, dann ist $\bar{\gamma}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit
$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(b+a-t)$$
eine Parameterdarstellung der Kurve $-C$.

- Stimmt der Endpunkt der Kurve C_1 mit dem Anfangspunkt der Kurve C_2 zusammen, so lässt sich in natürlicher Weise die Kurve $C_1 + C_2$ bilden. Wenn $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bzw. $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Parameterdarstellungen der Kurven C_1 bzw. C_2 sind, dann ist $\gamma\colon [a, b+d-c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{für } t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$
eine Parameterdarstellung der Kurve $C_1 + C_2$. Falls C eine geschlossene Kurve ist schreibt man für $C + C$ kurz $2C$. Analog wird nC für $n \in \mathbb{N}$ eingeführt.

- Eine Kurve C heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn sie sich als endliche Summe von stetig differenzierbaren Kurven darstellen lässt.

Beispiele:

Beispiel 7.1. *Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1:*
$\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)^T$

Beispiel 7.2. *Graph der Funktion* $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$*: quadratische Parabel*
$\gamma\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t^2)^T$.

Beispiel 7.3. *Graph der Funktion* $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$*, gespiegelt um die erste Mediane:*
$\gamma\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t)^T$.

Beispiel 7.4. *Rand des Quadrates* $[0,1] \times [0,1]$*:*
$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ *mit den Parameterdarstellungen* $\gamma_1\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,0)^T$, $\gamma_2\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1,t)^T$, $\gamma_3\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (1-t,1)^T$, $\gamma_4\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (0, 1-t)^T$.

7.1.2 Kurvenintegrale

Sei $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C und sei $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf der Bildmenge $\Gamma = \gamma([a,b])$.

- Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in N Teilintervalle
$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b.$$

- Länge des Teilintervalls $[t_{k-1}, t_k]$: $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.
- Feinheit der Zerlegung $h = \max\{\Delta t_k \colon k = 1, 2, \ldots, N\}]$.
- Zwischenpunkte: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ mit $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$.
- Riemann-Summe:

$$S(f, \gamma, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k)) \, \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|.$$

Es lässt sich unter diesen Bedingungen zeigen, dass die Riemann-Summe für $h \to 0$ einen Grenzwert besitzt (unabhängig von der Wahl von Z und ξ).

Definition 7.3. *1. Sei $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f \colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Gamma = \gamma([a, b])$ stetig. Dann heißt*

$$\int_C f(x) \; ds = \lim_{h \to 0} S(f, \gamma, Z, \xi) = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k)) \, \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

das Kurvenintegral (Linienintegral) von f entlang der Kurve C.

2. Erweiterung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven $C = \sum_{i=1}^{k} C_i$:

$$\int_C f(x) \; ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} f(x) \; ds.$$

Alternative Schreibweise für geschlossene Kurven:

$$\oint_C f \, ds$$

Satz 7.1. *Sei $\gamma \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f \colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Gamma = \gamma([a, b])$ stetig. Dann gilt:*

$$\int_C f(x) \; ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \; dt.$$

Beweisskizze. Es gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) &= \gamma(t_k) - \gamma(\xi_k) - [\gamma(t_{k-1}) - \gamma(\xi_k)] \approx \gamma'(\xi_k)(t_k - \xi_k) - \gamma'(\xi_k)(t_{k-1} - \xi_k) \\ &= \gamma'(\xi_k) \, \Delta t_k. \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k)) \, \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \approx \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k)) \, \|\gamma'(\xi_k)\| \, \Delta t_k.$$

Die Behauptung folgt für $h \to 0$. $\square$

Unabhängigkeit von der Parametrisierung

Für $\gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gelte:

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s)) \quad \text{für alle } s \in [c,d]$$

mit einer differenzierbaren und streng monoton wachsenden Funktion $\phi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ mit $\phi(c) = a$ und $\phi(d) = b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\gamma_1(t))\,\|\gamma_1'(t)\|\;dt &= \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(\gamma_1(t))\,\|\gamma_1'(t)\|\;dt \\
&= \int_c^d f(\gamma_1(\phi(s)))\,\|\gamma_1'(\phi(s))\|\,\phi'(s)\;ds = \int_c^d f(\gamma_1(\phi(s)))\,\|\gamma_1'(\phi(s))\,\phi'(s)\|\;ds \\
&= \int_c^d f(\gamma_2(s))\,\|\gamma_2'(s)\|\;ds
\end{aligned}$$

- Länge einer Kurve, Bogenlänge einer Jordan-Kurve:

$$|C| = \int_C 1\;ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\;dt$$

Beispiel 7.5. *Umfang des Kreises*

$$|C| = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\;dt = \int_0^{2\pi} 1\;dt = 2\pi$$

Beispiel: Länge des Parabelbogens der quadratischen Parabel $y = x^2$, $x \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
|C| &= \int_{-1}^{1} \|\gamma'(t)\|\;dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4t^2}\;dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1+u^2}\;du = \int_0^2 \sqrt{1+u^2}\;du \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} u + u\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} 2 + 2\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) + \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Sei $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C und sei $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion (Vektorfeld) auf der Bildmenge $\Gamma = \gamma([a,b])$.

Mit den Bezeichnungen von vorhin bilden wir folgende Riemann-Summe:

$$S(f,\gamma,Z,\xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k)) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

Es lässt sich unter diesen Bedingungen zeigen, dass die Riemann-Summe für $h \to 0$ einen Grenzwert besitzt (unabhängig von der Wahl von Z und ξ).

Definition 7.4. *1. Sei $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma = \gamma([a,b])$ stetig. Dann heißt*

$$\int_C f(x)\cdot dx = \lim_{h\to 0} S(f,\gamma,Z,\xi) = \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k))\cdot(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1}))$$

das Kurvenintegral (Linienintegral) von f entlang der Kurve C.

2. Erweiterung auf stückweise stetig differenzierbare Kurven $C = \sum_{i=1}^{k} C_i$:

$$\int_C f(x)\cdot dx = \sum_{i=1}^{k}\int_{C_i} f(x)\cdot dx.$$

Alternative Schreibweise:

$$\int_C (f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n)$$

Alternative Schreibweisen für geschlossene Kurven:

$$\oint_C f\cdot dx \quad \text{oder} \quad \oint_C (f_1\ dx_1 + f_2\ dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n)$$

Satz 7.2. *Sei $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve C in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Gamma = \gamma([a,b])$ stetig. Dann gilt:*

$$\int_C f(x)\cdot dx = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt.$$

Beweisskizze. Es gilt:

$$\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1}) \approx \gamma'(\xi_k)\,\Delta t_k.$$

Also

$$\sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k))\cdot(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})) \approx \sum_{k=1}^{N} f(\gamma(\xi_k))\cdot\gamma'(\xi_k)\,\Delta t_k$$

Die Behauptung folgt für $h \to 0$. □

Wie vorhin folgt die Unabhängigkeit des Integrals von der Parametrisierung.

Beispiel 7.6. *Gravitationskraft, die eine Punktmasse mit Masse m_1 im Ursprung auf eine Punktmasse mit Masse m_2 im Punkt x ausübt:*

$$F(x) = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\frac{x}{r} \quad \text{mit } r = \|x\|$$

Die Punktmasse mit Masse m_2 wird entlang der Kurve C mit Parametrisierung $\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^T$ im Gravitationsfeld bewegt. Die dazu notwendige Arbeit W ist durch

$$W = -\int_C F(x) \cdot dx$$

gegeben. Berechnung von W:

$$\begin{aligned}
W &= -\int_C F(x) \cdot dx = -\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = G\,m_1 m_2 \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(t) \cdot \gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|^3}\ dt \\
&= G\,m_1 m_2 \int_0^{2\pi} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}\ dt = G\,m_1 m_2\,\frac{1}{2}\int_1^{4\pi^2+1} \frac{1}{u^{3/2}}\ du \\
&= -G\,m_1 m_2\,\frac{1}{\sqrt{u}}\bigg|_1^{4\pi^2+1} = -G\,m_1 m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}} - 1\right)
\end{aligned}$$

Die Rechenregeln der eindimensionalen Integralrechnung lassen sich auf Kurvenintegrale leicht übertragen.

Satz 7.3. *Sei C eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$. Seien C_1 und C_2 stückweise stetig differenzierbare Kurven, der Endpunkt von C_1 sei der Anfangspunkt von C_2. Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle Funktionen f und g, die auf den jeweiligen Kurven stetig sind:*

$$\begin{aligned}
\int_C (f(x) + g(x))\ ds &= \int_C f(x)\ ds + \int_C g(x)\ ds \\
\int_C (c\,f(x))\ ds &= c\int_C f(x)\ ds \\
\int_{C_1+C_2} f(x)\ ds &= \int_{C_1} f(x)\ ds + \int_{C_2} f(x)\ ds \\
\int_{-C} f(x)\ ds &= \int_C f(x)\ ds
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_C (f(x) + g(x)) \cdot dx &= \int_C f(x) \cdot dx + \int_C g(x) \cdot dx \\
\int_C (c\,f(x)) \cdot dx &= c\int_C f(x) \cdot dx \\
\int_{C_1+C_2} f(x) \cdot dx &= \int_{C_1} f(x) \cdot dx + \int_{C_2} f(x) \cdot dx \\
\int_{-C} f(x) \cdot dx &= -\int_C f(x) \cdot dx
\end{aligned}$$

und

$$\left\| \int_C f(x)\ ds \right\| \le \max\{\|f(x)\| : x \in C\}\, |C|$$
$$\left| \int_C f(x) \cdot dx \right| \le \max\{\|f(x)\| : x \in C\}\, |C|$$

7.1.3 Wegunabhängigkeit

Definition 7.5. *Eine vektorwertige Funktion (Vektorfeld) $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Gradientenfeld (Potentialfeld), falls es eine skalare Funktion $\phi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $f = \operatorname{grad} \phi$. ϕ heißt Stammfunktion von f, $-\phi$ heißt das Potential von f.*

- Beispiel: Gravitationsfeld

  $$F(x) = -G\,\frac{m_1\, m_2}{r^2}\,\frac{x}{r} \quad \text{mit } r = \|x\|$$

  Es gilt für $x \neq 0$ und $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$:

  $$\operatorname{grad} r = \frac{1}{r}\, x \quad \text{und daher} \quad \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}\, x$$

  Also

  $$F(x) = -\operatorname{grad} U(x) \quad \text{mit} \quad U(x) = -G\,\frac{m_1\, m_2}{r}$$

Satz 7.4. *Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld mit einer stetig differenzierbaren Stammfunktion $\phi\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve C in X mit Anfangspunkt γ_a und Endpunkt γ_b:*

$$\int_C f(x) \cdot dx = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für stetig differenzierbare Kurven zu führen:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x) \cdot dx &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \operatorname{grad} \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_a^b \phi'(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \\
&= \int_a^b [\phi(\gamma(t))]'\ dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)
\end{aligned}$$

□

- Formulierung als Integralsatz:

  $$\int_C \operatorname{grad} \phi(x) \cdot dx = \phi(\gamma_b) - \phi(\gamma_a)$$

  Das rechtfertigt den Namen Stammfunktion.

Beispiel 7.7. *Die Punktmasse mit Masse m_2 wird entlang der Kurve C mit Parametrisierung $\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^T$ im Gravitationsfeld bewegt. Berechnung der dazu erforderlichen Arbeit mit Hilfe des Potentials:*

$$\begin{aligned} W = -\int_C F(x)\cdot dx = \int_C \operatorname{grad} U(x)\cdot dx &= U(\gamma(2\pi)) - U(\gamma(0)) \\ &= -G\, m_1 m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}} - 1\right) \end{aligned}$$

Definition 7.6. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Gebiet, wenn*

1. *sie offen und*
2. *sie im folgenden Sinn zusammenhängend ist: Je zwei beliebige Punkte aus M lassen sich durch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in M verbinden.*

Definition 7.7. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt f konservativ, wenn für alle Punkte γ_a, $\gamma_b \in X$ und für alle stückweise stetig differenzierbare Kurven C_1 und C_2 mit Anfangspunkt γ_a und Endpunkt γ_b gilt:*

$$\int_{C_1} f(x)\cdot dx = \int_{C_2} f(x)\cdot dx$$

- Alternative Schreibweise für das Kurvenintegral, falls f konservativ ist:

$$\int_C f(x)\cdot dx = \int_{\gamma_a}^{\gamma_b} f(x)\cdot dx.$$

- Man sieht sofort, dass f genau dann konservativ ist, wenn

$$\oint_C f(x)\cdot dx = 0$$

  für alle geschlossenen stückweise stetigen Kurven C in X.

Satz 7.5. *Sei X ein Gebiet und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:*

1. *Wenn f ein Gradientenfeld ist, dann ist f konservativ.*
2. *Wenn f konservativ ist, dann ist f ein Gradientenfeld mit der Stammfunktion*

$$\phi(y) = \int_a^y f(x)\cdot dx,$$

   wobei $a \in X$ ein beliebiger aber fester Punkt ist.

Beweis. Der erste Teil folgt aus dem letzten Satz.

Zum zweiten Teil: Seien $y \in X$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass die Gerade C mit der Parameterdarstellung $\gamma(t) = y + th$ für alle $t \in [0,1]$ in X liegt. Dann gilt

$$\phi(y+h) = \phi(y) + f(y)^T h + r(h)$$

mit

$$\begin{aligned} r(h) &= \int_a^{y+h} f(x) \cdot dx - \int_a^y f(x) \cdot dx - f(y)^T h = \int_C f(x) \cdot dx - \int_C f(y) \cdot dx \\ &= \int_C (f(x) - f(y)) \cdot dx. \end{aligned}$$

Also:

$$|r(h)| = \left| \int_C (f(x) - f(y)) \cdot dx \right| \leq \max\{\|f(y+th) - f(y)\| \colon t \in [0,1]\} \, \|h\|.$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$\frac{1}{\|h\|} \, |r(h)| \leq \max\{\|f(y+th) - f(y)\| \colon t \in [0,1]\} \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

Das bedeutet: $f(y)^T = \phi'(y)$, also $\operatorname{grad} \phi(y) = f(y)$. □

Definition 7.8.

Eine Menge M heißt sternförmig, falls es einen Punkt $a \in M$ gibt, sodass $a + t(x-a) \in M$ für alle $x \in M$ und alle $t \in [0,1]$.

Satz 7.6. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

1. *Ist f ein Gradientenfeld, dann gilt für die Komponentenfunktionen f_i:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \tag{7.1}$$

für alle $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

2. *Ist X zusätzlich sternförmig und gilt* (7.1)*, dann ist f ein Gradientenfeld.*

Beweis. Zu 1.:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Zu 2.: Sei $a \in X$ fest und sei C_x die Gerade zwischen a und x mit der Parameterdarstellung $\gamma_x \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_x(t) = a + t(x-a)$.

Wir zeigen, dass

$$\phi(x) = \int_{C_x} f(y) \cdot dy = \int_0^1 f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\ dt$$

eine Stammfunktion von f ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \phi(x) &= \operatorname{grad} \left(\int_0^1 f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\ dt \right) \\ &= \int_0^1 \operatorname{grad} \big(f(a+t(x-a)) \cdot (x-a) \big)\ dt \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} \big(f(a+t(x-a)) \cdot (x-a) \big) = \Big[\big(f(a+t(x-a)) \big)' \Big]^T (x-a) + I\, f(a+t(x-a)) \\ &= f(a+t(x-a)) + \Big[f'(a+t(x-a))\, (t\, I) \Big]^T (x-a) \\ &= f(a+t(x-a)) + t\, f'(a+t(x-a))^T (x-a) \\ &= f(a+t(x-a)) + t\, f'(a+t(x-a))(x-a) = \frac{d}{dt} \Big(t\, f(a+t(x-a)) \Big) \end{aligned}$$

Also

$$\operatorname{grad} \phi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \Big(t\, f(a+t(x-a)) \Big)\ dt = \Big(t\, f(a+t(x-a)) \Big) \Big|_0^1 = f(x)$$

□

- Die Bedingung (7.1) nennt man Integrabilitätsbedingung.
- Dieser Satz bietet ein einfaches Kriterium, um zu überprüfen, ob ein Vektorfeld konservativ bzw. ein Gradientenfeld ist.
- (7.1) $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ ist symmetrisch.
- Für $n = 3$: (7.1) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} f(x) = 0$.
- Sei der Einfachheit halber $n = 2$: Für ein konservatives Vektorfeld kann man jeden Weg zwischen $\gamma_a = (a_1, a_2)^T$ und $\gamma_b = (b_1, b_2)^T$ wählen, z.B. auch einen stückweise geraden Weg parallel zu den Koordinatenachsen, sofern man den Definitionsbereich X nicht verlässt: $C = C_1 + C_2$ mit $\gamma_1 \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2)^T$ und $\gamma_2 \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (b_1, a_2 + t(b_2 - a_2))^T$. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_a}^{\gamma_b} f(x) \cdot dx \\ &\quad = \int_0^1 f_1(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2)(b_1 - a_1)\ dt + \int_0^1 f_2(b_1, a_2 + t(b_2 - a_2))(b_2 - a_2)\ dt \\ &\quad = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1, a_2)\ dx_1 + \int_{a_2}^{b_2} f_2(b_1, x_2)\ dx_2 \end{aligned}$$

- Die Aussagen des letzten Satzes lassen sich auf so genannte einfach zusammenhängende Gebiete erweitern. Ein Gebiet X heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve in X auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

7.2 Mehrfache Riemann-Integrale

Sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

- Durch Zerlegungen $Z_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_M\}$ von $[a_1, b_1]$ und $Z_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ von $[a_2, b_2]$ wird das Intervall I in Teilintervalle I_{kl} unterteilt.

  $Z = Z_1 \times Z_2$ heißt Zerlegung von I.

- Länge der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ und $[y_{l-1}, y_l]$: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ und $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$.

  Fläche der Teilintervalle I_{kl}: $\Delta x_k \, \Delta y_l$

- Feinheit der Zerlegungen $h_1 = \max\{\Delta x_k \colon k = 1, 2, \dots, M\}$ und $h_2 = \max\{\Delta y_l \colon l = 1, 2, \dots, N\}$.

  Feinheit der Zerlegung Z: $h = \max(h_1, h_2)$

- Zwischenpunkte: $\zeta = (\zeta_{kl})_{k=1,\dots,M, l=1,\dots,N}$ mit $\zeta_{kl} = (\xi_{kl}, \eta_{kl}) \in I_{kl}$.

- Riemann-Summe:
$$S(f, Z, \zeta) = \sum_{k,l} f(\zeta_{kl}) \, \Delta x_k \, \Delta y_l.$$

Definition 7.9. *Eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann Riemann-integrierbar (kurz R-integrierbar), wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} S(f, Z, \zeta) = \lim_{h \to 0} \sum_{k,l} f(\zeta_{kl}) \, \Delta x_k \, \Delta y_l = \int_I f(x, y) \; d(x, y)$$

existiert.

- Völlig analog definiert man
$$\int_I f(x, y, z) \; d(x, y, z)$$
  und allgemein
$$\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) \; d(x_1, x_2, \dots .x_n) \quad \text{oder kurz} \quad \int_I f(x) \; dx$$

- Erweiterung auf Funktionen $f\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ für allgemeinere beschränkte Definitionsbereiche $B \subset \mathbb{R}^n$: Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall mit $B \subset I$. Sei $f_B\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ die triviale Erweiterung von f auf I:

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{für } x \in I \setminus B. \end{cases}$$

  Falls f_B Riemann-integrierbar ist, definiert man:

$$\int_B f(x)\ dx = \int_I f_B(x)\ dx$$

  Das Integral $\int_B f(x)\ dx$ hängt nicht von der speziellen Wahl von I ab.

- Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Die charakteristische Funktion $i_B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$i_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus B. \end{cases}$$

  gegeben. Falls i_B R-integrierbar ist, heißt B Jordan-messbar. Dann ist

$$|B| = \int_B i_B(x)\ dx = \int_B 1\ dx$$

  wohldefiniert und heißt Jordan-Maß von B. Im Speziellen erhält man für $n = 2$ den Flächeninhalt von B und für $n = 3$ das Volumen von B.

- Erweiterung auf unbeschränkte Funktionen und/oder unbeschränkte Definitionsbereiche durch Grenzwert: uneigentliche Integrale

Die Sätze 3.4 und 3.5 gelten auch analog für Mehrfachintegrale.

7.2.1 Der Satz von Fubini

Satz 7.7 (Satz von Fubini)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ beschränkte abgeschlossene Intervalle und sei $f\colon I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar.*

1. *Falls $f(.,y)\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ für alle $y \in J$ R-integrierbar ist, dann ist die Abbildung $y \mapsto \int_I f(x,y)\ dx$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_{I\times J} f(x,y)\ d(x,y) = \int_J \left(\int_I f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

2. *Falls $f(x,.)\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ für alle $x \in I$ R-integrierbar ist, dann ist die Abbildung $x \mapsto \int_J f(x,y)\ dy$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_{I\times J} f(x,y)\ d(x,y) = \int_I \left(\int_J f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

Beweis. Es gilt

$$S(f,Z,\zeta) = \sum_{k,l} f(\zeta_{kl})\,\Delta x_k\,\Delta y_l = \sum_l \left(\sum_k f(\zeta_{kl})\,\Delta x_k\right)\,\Delta y_l = \sum_k \left(\sum_l f(\zeta_{kl})\,\Delta y_l\right)\,\Delta x_k.$$

Durch Grenzübergang folgt dann die Behauptung. □

- Die Integrale

$$\int_J \left(\int_I f(x,y)\;dx\right)\;dy \quad \text{und} \quad \int_I \left(\int_J f(x,y)\;dy\right)\;dx$$

heißen iterierte Integrale. Die Existenz der iterierten Integrale reicht nicht aus. Zusätzlich muss f R-integrierbar sein. Hinreichend: f ist stetig.

- Die Aussagen des Satzes von Fubini gelten analog für Jordan-messbare Integrationsbereiche X und sie lassen sich auf beliebige Mehrfachintegrale erweitern.

Beispiel 7.8. *Flächeninhalt eines Kreises* $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \le R^2\}$.

Die charakteristische Funktion von B ist fast überall stetig, daher ist sie R-integrierbar. Wegen $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon\; -R \le x \le R,\; -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\}$ *folgt aus dem Satz von Fubini:*

$$\begin{aligned}|B| &= \int_B 1\;d(x,y) = \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\;dy\right)\;dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-x^2}\;dx \\ &= 2R^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\;dt = R^2\left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right)\Big|_{-1}^{1} = R^2\pi\end{aligned}$$

Beispiel 7.9. *Volumen eines Kegels* $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon z \ge 0,\; \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \le 1\}$.

Es gilt: $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon 0 \le z \le H,\; (x,y)^T \in B_z\}$ *mit*

$$B_z = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \le R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\right\}$$

Daher

$$\begin{aligned}|B| &= \int_B 1\;d(x,y,z) = \int_0^H \left(\int_{B_z} 1\;d(x,y)\right)\;dz = \int_0^H R^2\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\pi\;dz \\ &= \pi R^2\int_1^0 t^2(-H)\;dt = \frac{\pi}{3}R^2H.\end{aligned}$$

7.2.2 Einfache Anwendungen von Mehrfachintegralen

Neben dem Flächeninhalt und dem Volumen gibt es weitere wichtige Größen, die durch Mehrfachintegrale dargestellt werden können:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ oder $B \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge. Sei $\rho(x)$ die (Massen-)Dichte an einer Stelle $x \in B$.

- Die Gesamtmasse M von B:
$$M = \int_B \rho(x)\ dx.$$
- Schwerpunkt s von B:
$$s = \frac{1}{M_B} \int_B x\, \rho(x)\ dx.$$
- Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte und Jordan-messbare Menge.

  Trägheitsmoment von B bei Drehung um eine vorgegebene Achse:
$$J = \int_B r(x)^2\, \rho(x)\ dx,$$
  wobei $r(x)$ der Normalabstand von x zur Drehachse ist.
- Trägheitsmomente bei Drehung um die x_1-Achse, x_2-Achse und x_3-Achse:
$$J_{11} = \int_B (x_2^2 + x_3^2)\, \rho(x)\ dx, \quad J_{22} = \int_B (x_1^2 + x_3^2)\, \rho(x)\ dx, \quad J_{33} = \int_B (x_1^2 + x_2^2)\, \rho(x)\ dx.$$
  Zusätzlich führt man für $i \neq j$ die folgenden Größen ein:
$$J_{ij} = -\int_B x_i x_j\, \rho(x)\ dx$$
  Die (symmetrische) 3×3 Matrix
$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$
  heißt Trägheitstensor.

7.2.3 Substitutionsregel

Zur Formulierung der Substitutionsregel benötigt man den Begriff der Determinante einer Matrix A. Wir beschränken uns auf den Fall $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \{1, 2, 3\}$:

Definition 7.10. *1. Für $A = a_{11} \in \mathbb{R}$:*
$$\det A = a_{11}$$

2. *Für* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$*:*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

3. *Für* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$*:*

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Wichtige Rechenregel:

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Geometrische Bedeutung:

1. Für $n = 2$: $|\det A|$ ist die Fläche des Parallelogramms, das durch die beiden Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

2. Für $n = 3$: $|\det A|$ ist das Volumen des Parallelepipeds, das durch die drei Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

Satz 7.8 (Substitutionsregel)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig differenzierbar und $\det g'(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Sei $f\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt: f ist auf $g(X)$ R-integrierbar und es gilt:*

$$\int_{g(X)} f(y)\ dy = \int_X f(g(x))\,|\det g'(x)|\ dx.$$

Beweisskizze. 1. Für $n = 1$: Wir betrachten den Fall $X = I = (a, b)$.

Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ können nur zwei Fälle auftreten:

(a) $g'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist g streng monoton wachsend und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{g(X)} f(y)\ dy &= \int_{(g(a),g(b))} f(y)\ dy = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy \\ &= \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx = \int_X f(g(x))\,|\det g'(x)|\ dx.\end{aligned}$$

(b) $g'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist g streng monoton fallend und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{g(X)} f(y)\ dy &= \int_{(g(b),g(a))} f(y)\ dy = \int_{g(b)}^{g(a)} f(y)\ dy = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ dy \\ &= -\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\ dx = \int_X f(g(x))\,|\det g'(x)|\ dx.\end{aligned}$$

2. Für $n = 2$.

(a) Wir betrachten den Fall $X = I = (a,b) \times (c,d)$ und diskutieren den Spezialfall:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dann erhält man

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det g'(x) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x).$$

Wir betrachten nur den Fall $\det g'(x) > 0$, also $g_1(x)$ ist streng monoton wachsend in x_1. Dann gilt (siehe $n = 1$):

$$\begin{aligned}
\int_{g(X)} f(y)\, dy &= \int_c^d \int_{g_1(a,y_2)}^{g_1(b,y_2)} f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 \\
&= \int_c^d \int_a^b f(g_1(x_1,x_2), x_2) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_c^d \int_a^b f(g(x))\, |\det g'(x)|\, dx_1\, dx_2 = \int_X f(g(x))\, |\det g'(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Völlig analog diskutiert man den Spezialfall:

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

(b) Allgemeiner Fall:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass die Abbildung

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ x_2 \end{pmatrix}$$

injektiv ist. Dann gilt

$$g(x) = H(G(x)) \quad \text{mit} \quad H(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ g_2(G^{-1}(u)) \end{pmatrix}$$

und daher (siehe (a)):

$$\begin{aligned}
\int_{g(X)} f(y)\, dy = \int_{H(G(X))} f(y)\, dy &= \int_{G(X)} f(H(u)) |\det H'(u)|\, du \\
&= \int_X f(H(G(x))) |\det H'(G(x))| |\det G'(x)|\, dx \\
&= \int_X f(\underbrace{H(G(x))}_{=g(x)}) |\det(\underbrace{H'(G(x))G'(x)}_{=g'(x)})|\, dx.
\end{aligned}$$

□

Wichtige Variablentransformationen

- Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$: Jeder Punkt $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ lässt sich in der Form

$$x = r\,\cos\varphi$$
$$y = r\,\sin\varphi$$

  mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$ darstellen.

  Die Abbildung $g\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{pmatrix}$$

  gegeben. g ist auf $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ injektiv mit $g(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)^T\colon x \in (-\infty,0]\}$, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix}$$

  und es gilt

$$\det g'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0.$$

  Beispiel 7.10. *Flächeninhalt eines Kreises $B = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \le R^2\}$.*

  Es gilt

$$|B| = \int_B 1\ d(x,y) = \int_{g(A)} 1\ d(x,y) = \int_A r\ d(r,\varphi)$$

  für $A = (0,R) \times (-\pi,\pi)$. Man beachte, dass sich B und $g(A)$ zwar unterscheiden, aber nur um eine Menge vom Jordan-Maß 0. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$|B| = \int_A r\ d(r,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r dr \right)\ d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2}{2}\ d\varphi = R^2\pi.$$

- Beispiel: Berechnung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx.$$

  Einerseits gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ d(x,y) = \int_{g(A)} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ d(x,y) = \int_A e^{-\frac{1}{2}r^2} r\ d(r,\varphi)$$

  mit $A = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$.

  Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\int_A e^{-\frac{1}{2}r^2} r\ d(r,\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\ dr \right)\ d\varphi$$

Es gilt

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2} r\ dr = \int_0^\infty e^{-u}\ du = -e^{-u}\Big|_0^\infty = 1$$

Also

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ d(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} 1\ d\varphi = 2\pi$$

Andererseits erhält man mit dem Satz von Fubini (ohne Koordinatentransformation):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ d(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\ dx\right)\ dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx\right)\ dy\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\ dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx\right)^2\end{aligned}$$

Also folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx = \sqrt{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx = 1.$$

- Zylinderkoordination in $\mathbb{R}^3$: Jeder Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\varphi\\ y &= r\ \sin\varphi\\ z &= z\end{aligned}$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$, $z \in \mathbb{R}$ darstellen.

Die Abbildung $g\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist durch

$$\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\ \cos\varphi\\ r\ \sin\varphi\\ z\end{pmatrix}$$

gegeben. g ist auf $D = (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ injektiv mit $g(D) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)^T\colon x \in (-\infty,0],\ z \in \mathbb{R}\}$, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\ \sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\ \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\det g'(r,\varphi,z) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0.$$

Beispiel 7.11. *Volumen des Kegels* $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$.

$$|B| = \int_B 1 \; d(x,y,z) = \int_{g(A)} 1 \; d(x,y,z) = \int_A r \; d(r,\varphi,z)$$

mit $A = \{(r,\varphi,z)^T \colon \varphi \in (-\pi,\pi),\ r > 0,\ \ z > 0,\ \frac{z}{H} + \frac{r}{R} < 1\}$. *Mit dem Satz von Fubini erhält man:*

$$\begin{aligned}\int_A r \; d(r,\varphi,z) &= \int_0^H \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{R(1-z/H)} r \; dr \right) \; d\varphi \right) \; dz \\ &= \int_0^H R^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \pi \; dz = \frac{\pi}{3} R^2 H.\end{aligned}$$

Beispiel 7.12. *Schwerpunkt des Kegels* $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon z \geq 0,\ \frac{z}{H} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \leq 1\}$ *mit konstanter Massendichte* ρ.

Offensichtlich gilt: $s_x = s_y = 0$. $M = \rho\,|B|$.

$$s_z = \frac{1}{M} \int_B z\rho \; d(x,y,z) = \frac{1}{|B|} \int_B z \; d(x,y,z)$$

Wir benötigen also das Integral

$$\int_B z \; d(x,y,z) = \int_{g(A)} z \; d(x,y,z) = \int_A zr \; d(r,\varphi,z).$$

Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned}\int_A zr \; d(r,\varphi,z) &= \int_0^H \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{R(1-z/H)} zr \; dr \right) \; d\varphi \right) \; dz \\ &= R^2\pi \int_0^H z \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \; dz = R^2\pi \left(\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3H} + \frac{z^4}{4H^2} \right)\Bigg|_0^H = \frac{\pi}{12} R^2 H^2\end{aligned}$$

Also

$$s_z = \frac{1}{|B|} \frac{\pi}{12} R^2 H^2 = \frac{1}{4} H.$$

- Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$: Jeder Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= r \, \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \, \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

mit $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$ darstellen.
Die Abbildung $g\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)^T\colon x \in (-\infty,0],\ z\in\mathbb{R}\}$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\,\sin\theta\cos\varphi \\ r\,\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

ist injektiv, stetig differenzierbar mit

$$g'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \det g'(r,\theta,\varphi) &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi = r^2\sin\theta > 0. \end{aligned}$$

Beispiel 7.13. *Volumen der Kugel $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.*

$$|B| = \int_B 1\ d(x,y,z) = \int_{g(A)} 1\ d(x,y,z) = \int_A r^2\sin\theta\ d(r,\theta,\varphi)$$

mit $A = (0,R)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)$. Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned} |B| &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^R r^2\sin\theta\ dr \right)\ d\varphi \right)\ d\theta \\ &= \frac{R^3}{3}\int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \sin\theta\ \ d\varphi \right)\ d\theta = \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

Beispiel 7.14. *Trägheitsmoment der Kugel $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ mit konstanter Massendichte ρ bei Drehung um die z-Achse.*

$$J_z = \int_B (x^2+y^2)\rho\ d(x,y,z) = \int_{g(A)} (x^2+y^2)\rho\ d(x,y,z) = \rho\int_A r^4\sin^3\theta\ d(r,\theta,\varphi).$$

Mit dem Satz von Fubini erhält man:

$$\begin{aligned} \int_A r^4\sin^3\theta\ d(r,\theta,\varphi) &= \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^R r^4\sin^3\theta\ dr \right)\ d\varphi \right)\ d\theta \\ &= \frac{R^5}{5}\int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^\pi \sin^3\theta\ d\varphi \right)\ d\theta = \frac{2\pi R^5}{5}\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^3\theta \; d\theta &= \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta \; d\theta = -\cos\theta\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2\theta(-\sin\theta)\; d\theta \\
&= 2 + \int_1^{-1} u^2 \; du = 2 + \frac{u^3}{3}\Big|_1^{-1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Also

$$
J_z = \rho\frac{4}{3}\frac{2\pi R^5}{5} = \rho\frac{4\pi R^3}{3}\frac{2}{5}R^2 = \frac{2}{5}MR^2
$$

7.3 Der Greensche Integralsatz

Wir nehmen zunächst an, dass sich eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ folgendermaßen darstellen lässt:

$$
B = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \in [a,b],\, \varphi_1(x_1) \le x_2 \le \varphi_2(x_1)\},
$$

wobei $\varphi_1 \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi_2 \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind. Man nennt B einen Normalbereich (bezüglich der x-Achse).

Zunächst betrachten wir den einfacheren Fall, dass φ_1 und φ_2 am gesamten Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbar sind. Dann lässt sich der Rand ∂B der Menge B als Bildmenge einer Kurve $C = C_1 + C_2 + (-C_3) + (-C_4)$ darstellen. Dabei sind

- C_1 die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$
\gamma^{(1)} \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_1(t))^T,
$$

- C_2 die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$
\gamma^{(2)} \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(b, \varphi_1(b) + t(\varphi_2(b) - \varphi_1(b))\big)^T,
$$

- C_3 die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$
\gamma^{(3)} \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \varphi_2(t))^T
$$

  und

- C_4 die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$
\gamma^{(4)} \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(a, \varphi_1(a) + t(\varphi_2(a) - \varphi_1(a))\big)^T.
$$

C ist offensichtlich eine geschlossene Kurve. Man beachte, dass der Rand ∂B durch diese Parametrisierungen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Bewegt man sich entlang der Kurve C entsprechend dem Durchlaufsinn, so befinden sich die Punkte von B immer links von der Randkurve. Man spricht von einer positiv orientierten Randkurve.

Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $B \subset X$. Dann folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\ d(x_1, x_2) &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\ dx_2 \right)\ dx_1 \\
&= \int_a^b [f(x_1, \varphi_2(x_1)) - f(x_1, \varphi_1(x_1))]\ dx_1 = \int_a^b f(t, \varphi_2(t))\ dt - \int_a^b f(t, \varphi_1(t))\ dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} f(t, \varphi_2(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}\ dt - \int_a^b \begin{pmatrix} f(t, \varphi_1(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}\ dt \\
&= \int_{C_3} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx - \int_{C_1} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx = - \int_{C_1} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx - \int_{-C_3} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{C_2} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\gamma^{(2)}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(b) - \varphi_1(b) \end{pmatrix}\ dt = 0$$

und

$$\int_{C_4} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot\ dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\gamma^{(4)}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(a) - \varphi_1(a) \end{pmatrix}\ dt = 0$$

erhält man schließlich:

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\ dx = - \int_C \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx.$$

Die Erweiterung auf den Fall, dass φ_1 und φ_2 am Intervall $[a, b]$ stückweise stetig differenzierbar sind, ist einfach.

Wir nehmen nun an, dass sich B folgendermaßen darstellen lässt:

$$B = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [c, d],\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\},$$

wobei $\psi_1\colon [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\psi_2\colon [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig differenzierbare Funktionen sind. Man nennt B einen Normalbereich (bezüglich der y-Achse).

Dann erhält man völlig analog:

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\ d(x_1, x_2) = - \int_{-C} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot dx.$$

Satz 7.9 (Greenscher Integralsatz). *Sei B ein Normalbereich sowohl bezüglich der x-Achse also auch bezüglich der y-Achse und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $B \subset X$. Dann gilt:*

$$\boxed{\int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right)\ d(x_1, x_2) = \int_C f(x) \cdot dx.}$$

Beweis.

$$\int_B \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right)\ d(x_1,x_2) = \int_B \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)\ d(x_1,x_2) - \int_B \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\ d(x_1,x_2)$$

$$= \int_C \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx + \int_C \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C f(x) \cdot dx.$$

□

Folgerung

Ersetzt man f_1 durch $-f_2$ und f_2 durch f_1 erhält man:

$$\int_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\right)\ d(x_1,x_2) = \int_C \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx.$$

Nun gilt

$$\int_C \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_C f(x) \cdot n(x)\ ds,$$

wobei $n(x)$ jener Einheitsvektor ist, der im Punkt $x \in \partial B$ normal zur Tangentenrichtung der Randkurve liegt und bezüglich B nach außen zeigt.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass C eine stetig differenzierbaren Kurve mit der Parametrisierung $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist. Also

$$\begin{aligned} &\int_C \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix} \cdot dx \\ &\quad = \int_0^1 \begin{pmatrix} -f_2(\gamma(t)) \\ f_1(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix}\ dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} f_1(\gamma(t)) \\ f_2(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}\ dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\ dt = \int_C f(x) \cdot n(x)\ ds \end{aligned}$$

mit

$$n(\gamma(t)) = \frac{1}{\|(\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Erweiterung auf den Fall, dass C eine stückweise stetig differenzierbare Kurve ist, ist einfach. □

Es gilt also (Gaußscher Integralsatz in $\mathbb{R}^2$):

$$\boxed{\int_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\right)\ d(x_1,x_2) = \int_C f(x) \cdot n(x)\ ds.}$$

Übliche Schreibweise der Integralsätze mit $\int_{\partial B}$ anstelle von $\int_C$.

Erweiterung auf allgemeinere Gebiete

- Der Greensche Satz gilt auch für Gebiete, die durch Drehung eines Normalbereiches entstehen. (Beweis mit Hilfe einer Koordinatentransformation und der Substitutionsregel)
- Der Greensche Satz gilt auch für Gebiete, die sich aus (gedrehten oder ungedrehten) Normalbereichen zusammensetzen lassen: Randkurven im Inneren werden entgegengesetzt durchlaufen und liefern daher keinen Beitrag.

Anwendungen

Aus dem Greenschen bzw. dem Gaußschen Integralsatz erhält man:

- Flächenformel: Anwendung des Greenschen Satzes auf die Funktion $f(x) = (-x_2, x_1)^T$: Es gilt
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2,$$
also
$$|B| = \frac{1}{2}\int_B 2\;dx = \frac{1}{2}\int_{\partial B} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot dx = \frac{1}{2}\int_{\partial B} (-x_2\;dx_1 + x_1\;dx_2)$$

  Beispiel 7.15. *Flächeninhalt der Ellipse $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$*
  Parameterdarstellung der Randkurve: $\gamma\colon [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)^T$.
$$|B| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -b\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} dt = ab\,\pi.$$

- Partielle Integration: Anwendung des Greenschen Satzes auf die Funktion $(f(x)g(x), 0)^T$ bzw. $(0, f(x)g(x))^T$:
$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,g(x)\;dx = \int_{\partial B} f(x)\,g(x)\,n_i(x)\;ds - \int_B f(x)\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\;dx \quad \text{für } i = 1, 2.$$
- 1. Greensche Identität:
$$\int_B \Big(g(x)\,\Delta f(x) + \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)\Big)\;dx = \int_{\partial B} g(x)\,\frac{\partial f}{\partial n}(x)\;ds$$
mit $(\partial f/\partial n)(x) = n(x)\cdot\nabla f(x)$
- 2. Greensche Identität:
$$\int_B \Big(g(x)\,\Delta f(x) - f(x)\,\Delta g(x))\Big)dx = \int_{\partial B} \left(g(x)\,\frac{\partial f}{\partial n}(x) - f(x)\,\frac{\partial g}{\partial n}(x)\right) ds$$

7.4 Oberflächenintegrale

Definition 7.11. *Sei $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, sei M eine offene Menge mit $K \subset M \subset \mathbb{R}^2$ und sei $\varphi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Dann heißt die Einschränkung $\varphi\big|_K$ der Funktion φ auf K eine Parameterdarstellung einer Fläche S.*

K heißt der Parameterbereich dieser Fläche. Die Definition lässt sich auf allgemeinere Parameterbereiche erweitern.

Beispiele:

- Teil einer Ebene: $\varphi\colon [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = p + u\,(q - p) + v\,(r - p)$ mit drei Punkten $p, q, r \in \mathbb{R}^3$, die nicht entlang einer Geraden liegen.
- Teil eines Zylindermantel: $\varphi\colon [0, \pi] \times [0, H] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(u, v) = (R\,\cos u, R\,\sin u, v)^T$.
- Oberfläche einer Halbkugel: $\varphi\colon [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(u, v) = (R\,\sin u \cos v, R\,\sin u \sin v, R\,\cos u)^T$.

Für $(u, v)^T \in K$ gilt: Die beiden Kurven $\gamma_1\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_1(t) = \varphi(t, v)$ und $\gamma_2\colon [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma_2(t) = \varphi(u, t)$ liegen auf der Fläche und schneiden einander im Punkt $\varphi(u, v) \in S$. Die beiden Tangentialvektoren im Punkt $\varphi(u, v) \in S$ sind durch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$$

gegeben. Der Vektor

$$N(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$$

heißt Normalvektor der Fläche im Punkt $\varphi(u, v) \in S$.

Wir gehen bei der Einführung des Oberflächenintegrals ähnlich wie beim Flächenintegral vor:

- Durch Zerlegungen $Z_u = \{u_0, u_1, \ldots, u_M\}$ von $[a, b]$ und $Z_v = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$ von $[c, d]$ wird das Intervall K in Teilintervalle K_{kl} unterteilt.

  $Z = Z_u \times Z_v$ heißt Zerlegung von K.
- Länge der Teilintervalle $[u_{k-1}, u_k]$ und $[v_{l-1}, v_l]$: $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ und $\Delta v_l = v_l - v_{l-1}$.

  Fläche der Teilintervalle K_{kl}: $\Delta u_k\, \Delta v_l$
- Zwischenpunkte: $\zeta = (\zeta_{kl})_{k=1,\ldots,M,l=1,\ldots,N}$ mit $\zeta_{kl} \in K_{kl}$.
- Durch die Zerlegung Z des Parameterbereiches wird eine Zerlegung der Fläche S erzeugt. Die einzelnen Teile $\varphi(K_{kl})$ besitzen einen Flächeninhalt, der annähernd gleich der Hälfte der Fläche des Parallelogramms ist, das durch die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ aufgespannt wird, wobei

$$A = \varphi(u_{k-1}, v_{l-1}), \quad B = \varphi(u_k, v_{l-1}), \quad C = \varphi(u_k, v_l), \quad D = \varphi(u_{k-1}, v_l).$$

Für diese Fläche erhält man

$$\Delta\sigma_{kl} = \|\Delta\vec{\sigma}_{kl}\|$$

mit

$$\Delta\vec{\sigma}_{kl} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\big(\varphi(u_k, v_l) - \varphi(u_{k-1}, v_{l-1})\big) \times \big(\varphi(u_{k-1}, v_l) - \varphi(u_k, v_{l-1})\big)$$

- Für ein Skalarfeld $f\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ führt man folgende Riemann-Summe ein:

$$S(f, Z, \zeta) = \sum_{k,l} f(\varphi(\zeta_{kl}))\,\Delta\sigma_{kl}.$$

Es lässt sich unter den genannten Bedingungen zeigen, dass die Riemann-Summe für $h \to 0$ einen Grenzwert besitzt (unabhängig von der Wahl von Z und ζ).

Definition 7.12. *Sei $f\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ ein stetiges Skalarfeld. Dann heißt*

$$\int_S f(x)\,d\sigma = \lim_{h\to 0} S(f, Z, \zeta) = \lim_{h\to 0} \sum_{k,l} f(\varphi(\zeta_{kl}))\,\Delta\sigma_{kl}$$

das Oberflächenintegral von f über der Fläche S.

Satz 7.10. *Sei $f\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ ein stetiges Skalarfeld. Dann gilt:*

$$\boxed{\int_S f(x)\,d\sigma = \int_K f(\varphi(u, v))\,\|N(u, v)\|\;d(u, v)}$$

Beweisskizze. Es gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(u_k, v_l) - \varphi(u_{k-1}, v_{l-1}) &= \varphi(u_k, v_l) - \varphi(\zeta_{kl}) - (\varphi(u_{k-1}, v_{l-1}) - \varphi(\zeta_{kl}))\\
&\approx \varphi'(\zeta_{k,l})\left(\begin{pmatrix} u_k \\ v_l \end{pmatrix} - \zeta_{kl}\right) - \varphi'(\zeta_{k,l})\left(\begin{pmatrix} u_{k-1} \\ v_{l-1} \end{pmatrix} - \zeta_{kl}\right) = \varphi'(\zeta_{k,l})\begin{pmatrix} \Delta u_k \\ \Delta v_l \end{pmatrix}\\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\zeta_{kl})\,\Delta u_k + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\zeta_{kl})\,\Delta v_l
\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\varphi(u_{k-1}, v_l) - \varphi(u_k, v_{l-1}) \approx -\frac{\partial\varphi}{\partial u}(\zeta_{kl})\,\Delta u_k + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\zeta_{kl})\,\Delta v_l$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{\sigma}_{kl} &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(\zeta_{kl})\,\Delta u_k + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\zeta_{kl})\,\Delta v_l\right) \times \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}(\zeta_{kl})\,\Delta u_k + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\zeta_{kl})\,\Delta v_l\right)\\
&= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(\zeta_{kl}) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\zeta_{kl})\right)\,\Delta u_k \Delta v_l = N(\zeta_{kl})\,\Delta u_k\,\Delta v_l
\end{aligned}$$

Also

$$\Delta\sigma_{kl} = \|\Delta\vec{\sigma}_{kl}\| \approx \|N(\zeta_{kl})\|\,\Delta u_k\,\Delta v_l$$

Die Behauptung folgt für $h \to 0$. $\square$

Für ein stetiges Vektorfeld $f\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ führt man analog folgende Riemann-Summe ein:

$$S(f, Z, \zeta) = \sum_{k,l} f(\varphi(u_{k-1}, v_{l-1})) \cdot \Delta\vec{\sigma}_{kl}.$$

Es lässt sich unter den genannten Bedingungen zeigen, dass die Riemann-Summe für $h \to 0$ einen Grenzwert besitzt (unabhängig von der Wahl von Z und ζ).

Definition 7.13. *Sei $f\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt*

$$\int_S f(x) \cdot d\vec{\sigma} = \lim_{h\to 0} S(f, Z, \zeta) = \lim_{h\to 0} \sum_{k,l} f(\varphi(\zeta_{kl})) \cdot \Delta\vec{\sigma}_{kl}$$

das Oberflächenintegral von f über der Fläche S.

Satz 7.11. *Sei $f\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\Phi = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt:*

$$\boxed{\int_S f(x) \cdot d\vec{\sigma} = \int_K f(\varphi(u, v)) \cdot N(u, v)\ d(u, v)}$$

Beweisskizze. Es gilt

$$\Delta\vec{\sigma}_{kl} \approx N(\zeta_{kl})\, \Delta u_k\, \Delta v_l$$

Also

$$\sum_{k,l} f(\varphi(\zeta_{kl})) \cdot \Delta\vec{\sigma}_{kl} \approx \sum_{k,l} f(\varphi(\zeta_{kl})) \cdot N(\zeta_{kl})\, \Delta u_k\, \Delta v_l.$$

Die Behauptung folgt für $h \to 0$. □

Wie man leicht überprüfen kann, gilt:

$$\int_S f(x) \cdot d\vec{\sigma} = \int_S f(x) \cdot n(x)\ d\sigma,$$

wobei $n(x)$ der Einheitsnormalvektor auf die Fläche S im Punkt $x = \varphi(u, v)$ ist, der in die gleiche Richtung wie $N(u, v)$ zeigt, also

$$n(\varphi(u, v)) = \begin{cases} \frac{1}{\|N(u,v)\|}\, N(u, v) & \text{falls } N(u, v) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Anwendungen und Beispiele

- Flächeninhalt:
$$|S| = \int_S 1 \; d\sigma.$$

Beispiel 7.16. *Oberfläche einer Kugel S*
Parametrisierung: $\varphi\colon [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *mit*
$\varphi(u,v) = (R\,\sin u \cos v, R\,\sin u \sin v, R\,\cos u)^T$.

$$|S| = \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \|N(u,v)\| \; d(u,v)$$

Es gilt

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} R\,\cos u \cos v \\ R\,\cos u \sin v \\ -R\,\sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\,\sin u \sin v \\ R\,\sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = R^2 \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

und daher
$$\|N(u,v)\| = R^2 \sin u$$

Es folgt:

$$|S| = R^2 \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \sin u \; d(u,v) = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin u \; du \right) \; dv = 4\pi R^2.$$

- Hat $f(x)$ die Bedeutung einer Flussdichte, dann ist $\int_S f(x) \cdot n(x) \; d\sigma$ der Gesamtfluss durch die Fläche S.

Beispiel 7.17. *Der Zylinder* $Z = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 \le R^2,\ z \in [0,H]\}$ *wird von einer Wärmequelle mit paralleler Strahlungsrichtung* $e = (-1,0,0)^T$ *und Intensität* I *bestrahlt. Dann ist die gesamte aufgenommene Leistung durch*

$$-I \int_S e \cdot n(x) \; d\sigma = -I \int_S e \cdot \; d\vec{\sigma}$$

gegeben, wobei S *die bestrahlte Oberfläche von* Z *bezeichnet. Berechne diese Leistung.*
Eine Parametrisierung von S *ist durch* $\varphi\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0,H] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *mit* $\varphi(u,v) = (R\,\cos u, R\,\sin u, v)^T$ *gegeben. Es gilt:*

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} -R\,\sin u \\ R\,\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\,\cos u \\ R\,\sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

Daher:

$$\begin{aligned}
-I \int_S e \cdot n(x)\ d\sigma &= -I \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,H]} e \cdot N(u,v)\ d(u,v) \\
&= I \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,H]} R \cos u\ d(u,v) = IR \int_0^H \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\ du \right) dv \\
&= 2IRH
\end{aligned}$$

Ergänzungen

- Ähnlich wie bei Kurvenintegrale bleiben Oberflächenintegrale unverändert, wenn man anstelle der Parametrisierung $\varphi(u,v)$ eine Parametrisierung $\varphi(g(s,t))$ mit

$$\det g'(s,t) > 0 \quad \text{für alle } r, s$$

  verwendet.
- Flächen und Oberflächenintegrale lassen sich völlig analog auch für Parameterbereiche $K \subset [a,b] \times [c,d]$ erweitern, die abgeschlossen und Jordan-messbar sind.
- Ähnlich wie bei Kurvenintegralen lassen sich auch Oberflächenintegrale auf Flächen erweitern, die sich stetig aus Flächenstücken zusammensetzen lassen, die jeweils eine stetig differenzierbare Parametrisierung besitzen.

7.5 Die Integralsätze von Stokes und Gauß

Satz 7.12 (Stokesscher Integralsatz). *Es gelten folgende Voraussetzungen:*

- *Sei $\varphi|_K$ eine Parameterdarstellung der Fläche S, wobei der Parameterbereich $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich beider Achsen ist und $\varphi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, M offen, $K \subset M \subset \mathbb{R}^2$, zweimal stetig differenzierbar ist.*
- *Sei C die positiv orientierte Randkurve von K mit einer stückweise stetig differenzierbaren Parameterdarstellung $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Sei ∂S die Kurve in $\mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung $\varphi \circ \gamma$.*
- *Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^3$, X offen, $\Phi = \varphi(K) \subset X \subset \mathbb{R}^3$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld.*

Dann gilt:

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\ d\sigma = \int_{\partial S} f(x) \cdot dx}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx &= \int_a^b f_1(\varphi(\gamma(t)))\, (\varphi_1(\gamma(t)))'\ dt \\
&= \int_a^b f_1(\varphi(\gamma(t))) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right)\ dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} f_1(\varphi(\gamma(t)))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\gamma(t)) \\ f_1(\varphi(\gamma(t))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \gamma'(t)\ dt = \int_C \begin{pmatrix} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \\ f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \cdot d(u,v) \\
&= \int_K \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \right) \right] d(u,v) \\
&= \int_K \left[\frac{\partial}{\partial u} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial}{\partial v} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \right] d(u,v)
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\frac{\partial}{\partial u} f_1(\varphi(u,v)) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v} f_1(\varphi(u,v)) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v)$$

Daher:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial}{\partial v} f_1(\varphi(u,v))\, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \\
&\quad = \frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v)) \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v)\, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \right] \\
&\qquad + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v)) \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v)\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v) \right] \\
&\quad = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\, N_3(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\, N_2(u,v).
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt:

$$\int_{\partial S} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \int_K \left[-\frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(u,v))\, N_3(u,v) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\varphi(u,v))\, N_2(u,v) \right]\ d(u,v)$$

Analog erhält man:

$$\int_{\partial S} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \int_K \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(\varphi(u,v))\, N_3(u,v) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(\varphi(u,v))\, N_1(u,v) \right]\ d(u,v)$$

und

$$\int_{\partial S} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(x) \end{pmatrix} \cdot dx = \int_K \left[-\frac{\partial f_3}{\partial x}(\varphi(u,v))\, N_2(u,v) + \frac{\partial f_3}{\partial y}(\varphi(u,v))\, N_1(u,v) \right]\, d(u,v)$$

Durch Summation folgt:

$$\int_{\partial S} f(x) \cdot dx = \int_K (\operatorname{rot} f)(\varphi(u,v)) \cdot N(u,v)\; d(u,v) = \int_S \operatorname{rot} f(x) \cdot n(x)\; d\sigma.$$

$\square$

Erweiterung auf allgemeinere Flächen

- Der Stokessche Integralsatz gilt auch für Flächen, die sich aus Flächen zusammensetzen lassen, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen: Randkurven im Inneren werden entgegengesetzt durchlaufen und liefern daher keinen Beitrag.

Für die Diskussion des Integralsatzes von Gauß nehmen wir zunächst an, dass sich eine Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ folgendermaßen darstellen lässt:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \colon (x_1, x_2) \in K,\ \varphi_1(x_1, x_2) \le x_3 \le \varphi_2(x_1, x_2)\}$$

mit einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ und stetigen Funktionen $\varphi_1 \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi_2 \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$.

Der Rand $S = \partial V$ der Menge V besteht aus 3 Teilen, der Grundfläche S_1, der Deckfläche S_2 und der Mantelfläche S_3. Wir setzen folgendes voraus:

- Es gibt eine Parameterdarstellung $\phi_1|_{K_1}$ der Grundfläche S_1 mit $\phi_1 \colon M_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, M_1 offen, $K_1 \subset M_1$ stetig differenzierbar.
- Es gibt eine Parameterdarstellung $\phi_2|_{K_2}$ der Deckfläche S_2 mit $\phi_2 \colon M_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, M_2 offen, $K_2 \subset M_2$ stetig differenzierbar.
- Es gibt eine Parameterdarstellung γ des Randes ∂K mit $\gamma \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stückweise stetig differenzierbar.

Wir nennen V einen Normalbereich bezüglich der x_1x_2-Ebene.

Für die weiteren Überlegungen nehmen wir der Einfachheit halber an, dass φ_1 und φ_2 auf einer offenen Menge M mit $K \subset M \subset \mathbb{R}^2$ zur Verfügung stehen, dort stetig differenzierbar sind, und $\phi_1 \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi_2 \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\phi_1(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi_1(u,v) \end{pmatrix}, \quad \phi_2(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi_2(u,v) \end{pmatrix}$$

zur Parametrisierung von S_1 und S_2 verwendet werden können.

Die Mantelfläche lässt sich mit Hilfe von ϕ_3, gegeben durch

$$\phi_3(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ v \end{pmatrix},$$

mit dem Parameterbereich $K_3 = \{(u,v)^T \in \mathbb{R}^2 \colon u \in [a,b],\ \varphi_1(\gamma(u)) \leq v \leq \varphi_2(\gamma(u))\}$ parametrisieren.

Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen Menge $X \subset \mathbb{R}^3$ mit $V \subset X$.

Dann gilt nach dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
&\int_V \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\ dx \\
&= \int_K \left(\int_{\varphi_1(x_1,x_2)}^{\varphi_2(x_1,x_2)} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\ dx_3 \right) d(x_1,x_2) \\
&= \int_K f(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2) - \int_K f(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Für den Normalvektor auf S_1, der bezüglich V nach außen zeigt, erhält man:

$$N(u,v) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned}
&-\int_K f(x_1,x_2,\varphi_1(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2) = \int_K f(u,v,\varphi_1(u,v))N_3(u,v)\ d(u,v) \\
&= \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(u,v,\varphi_1(u,v)) \end{pmatrix} \cdot N(u,v)\ d(u,v) = \int_{S_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma.
\end{aligned}$$

Analog erhält man für die Deckfläche:

$$\begin{aligned}
&\int_K f(x_1,x_2,\varphi_2(x_1,x_2))\ d(x_1,x_2) = \int_K f(u,v,\varphi_2(u,v))N_3(u,v)\ d(u,v) \\
&= \int_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(u,v,\varphi_2(u,v)) \end{pmatrix} \cdot N(u,v)\ d(u,v) = \int_{S_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma,
\end{aligned}$$

wobei $N(u,v)$ wieder der nach außen zeigende Normalvektor ist.

Für den Normalvektor auf S_3 erhält man

$$N(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(u) \\ \gamma_2'(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2'(u) \\ -\gamma_1'(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle jene Werte von u, für die die Randkurve von K stetig differenzierbar ist. Daher folgt sofort:

$$\int_{S_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma = \int_{K_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(\phi_3(u,v)) \end{pmatrix} \cdot N(u,v)\ d(u,v) = 0.$$

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\ dx &= \int_{S_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma + \int_{S_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma + \int_{S_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma \\ &= \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma \end{aligned}$$

Falls V ein Normalbereich bezüglich der x_1x_3-Ebene ist, folgt analog

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\ dx = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma.$$

Falls V ein Normalbereich bezüglich der x_2x_3-Ebene ist, folgt analog

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\ dx = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma.$$

Satz 7.13 (Gaußscher Integralsatz)**.** *Sei V ein Normalbereich bezüglich aller drei Koordinatenebenen mit Oberfläche ∂V. Dann gilt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit X offen und $V \subset X \subset \mathbb{R}^3$:*

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} f(x)\ dx = \int_{\partial V} f(x) \cdot n(x)\ d\sigma}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} f(x)\ dx &= \int_V \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\ dx + \int_V \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x)\ dx + \int_V \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x)\ dx \\ &= \int_{\partial V} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma + \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma + \int_{\partial V} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(x) \end{pmatrix} \cdot n(x)\ d\sigma \\ &= \int_{\partial V} f(x) \cdot n(x)\ d\sigma. \end{aligned}$$

$\square$

Erweiterung auf allgemeinere Bereiche

- Der Gaußsche Integralsatz gilt auch für Bereiche, die sich aus Normalbereichen zusammensetzen lassen: Oberflächen im Inneren sind entgegengesetzt orientiert und liefern daher keinen Beitrag.

Anwendungen

Aus dem Gaußschen Integralsatz erhält man:

- Partielle Integration:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x)\; dx = \int_{\partial V} f(x)\, g(x)\, n_i(x)\; d\sigma - \int_V f(x)\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\; dx$$

- 1. Greensche Identität:

$$\int_V \Big(g(x)\, \Delta f(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) \Big)\; dx = \int_{\partial V} g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x)\; d\sigma$$

  mit $(\partial f / \partial n)(x) = n(x) \cdot \nabla f(x)$

- 2. Greensche Identität:

$$\int_V \Big(g(x)\, \Delta f(x) - f(x)\, \Delta g(x)) \Big) dx = \int_{\partial V} \left(g(x)\, \frac{\partial f}{\partial n}(x) - f(x)\, \frac{\partial g}{\partial n}(x) \right) d\sigma$$

Kapitel 8

Differential- und Integralrechnung in $\mathbb{C}$

8.1 Holomorphe Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen.

Definition 8.1. *Eine (komplexe) Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt z_0 (komplex) differenzierbar, falls der Grenzwert*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existiert. $f'(z_0)$ heißt Ableitung von f in z_0.

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph in D, wenn f in jedem Punkt von D differenzierbar ist. Die komplexe Funktion $f'\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(z)$ heißt Ableitung von f.

Genauso wie in $\mathbb{R}$ gilt:

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann im Punkt z_0 (komplex) differenzierbar, wenn es eine Zahl $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) = 0,$$

d.h., wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \underbrace{\left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right)}_{= r(z - z_0)} = 0,$$

Mit $h = z - z_0$ und der anschließenden Umbenennung $z_0 \to z$ gilt daher:

Satz 8.1. *$f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann im Punkt z (komplex) differenzierbar, wenn es eine Zahl $f'(z) \in \mathbb{C}$ gibt, sodass*

$$f(z + h) = f(z) + f'(z)h + r(h)$$

mit

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0.$$

Diese Zahl $f'(z)\in\mathbb{C}$ ist die Ableitung von f im Punkt z.

Man beachte, dass die Bedingung

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0$$

genau dann erfüllt ist, wenn

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{|h|}=0.$$

Jeder komplexen Zahl lässt sich ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ zuordnen und umgekehrt:

$$z=x+iy\in\mathbb{C}\quad\longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

Einer komplexen Funktion $f\colon D\longrightarrow\mathbb{C}$ lässt sich eine Funktion $f^*\colon D^*\longrightarrow\mathbb{R}^2$ mit $D^*=\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2\colon x+iy\in D\}$ zuordnen und umgekehrt: Mit $u(x,y)=\operatorname{Re}f(x+iy)$ und $v(x,y)=\operatorname{Im}f(x+iy)$ gilt offensichtlich

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)\quad\text{für}\quad z=x+i\,y.$$

Dann ist f^* durch

$$f^*(x,y)=\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}$$

gegeben.

Analog ordnen wir dem Restglied $r(h)$

$$r(h)=r_1(h_1,h_2)+i\,r_2(h_1,h_2)\quad\text{für}\quad h=h_1+i\,h_2.$$

die Funktion

$$r^*(h_1,h_2)=\begin{pmatrix}r_1(h_1,h_2)\\r_2(h_1,h_2)\end{pmatrix}$$

zu. Mit

$$f'(z_0)=\alpha+i\,\beta$$

erhält man

$$f'(z_0)h=(\alpha+i\,\beta)(h_1+i\,h_)=\alpha h_1-\beta h_2+i(\beta h_1+\alpha h_2),$$

also

$$\begin{pmatrix}\operatorname{Re}(f'(z_0)h)\\\operatorname{Im}(f'(z_0)h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha h_1-\beta h_2\\\beta h_1+\alpha h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$$

Insgesamt folgt somit: $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ (komplex) differenzierbar, wenn es Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f^*(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f^*(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + r^*(h_1, h_2)$$

mit

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\, r^*(h_1, h_2) = 0,$$

also genau dann, wenn f^* in (x_0, y_0) (total) differenzierbar ist und

$$f^*(x_0, y_0)' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

Satz 8.2. *Die komplexe Funktion $f\colon D(\subset \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ (komplex) differenzierbar, wenn $f^*\colon D^*(\subset \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ im Punkt $(x_0, y_0) \in D^*$ (total) differenzierbar ist und die so genannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

gelten.

Unter den Bedingungen dieses Satzes erhält man also für die komplexe Ableitung:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \text{mit} \quad z = x + iy.$$

Für die Differentiation in $\mathbb{C}$ gelten analoge Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$:

- Additionsregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel.
- Ableitung von Potenzfunktionen: Für $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\boxed{(z^m)' = m\, z^{m-1}}$$

- Ableitung der Exponentialfunktion:

$$\boxed{(e^z)' = e^z}$$

- Ableitungen der komplexen Winkelfunktionen und Hyperbelfunktionen: Diese Funktionen sind mit Hilfe von Exponentialfunktionen darstellbar: Ergebnis wie in $\mathbb{R}$.

8.2 Kurven in $\mathbb{C}$ und komplexe Kurvenintegrale

- Parametrisierte Kurve C in $\mathbb{C}$: $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar.
- Für eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ lässt sich analog zu Kurvenintegralen in $\mathbb{R}^2$ eine Riemann-Summe bilden:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\zeta_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

Für stetige Funktionen f lässt sich zeigen, dass die Riemann-Summe für $h \to 0$ einen Grenzwert besitzt.

Definition 8.2. *Sei $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung einer Kurve C in $\mathbb{C}$ und sei $f\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\Gamma = \gamma([a,b])$ stetig. Dann heißt*

$$\int_C f(z)\ dz = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\zeta_k))\,(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

das (komplexe) Kurvenintegral von f entlang der Kurve C.

Zugeordete Kurve C^* in $\mathbb{R}^2$: $\gamma^*\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\gamma^*(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\,\gamma_2(t).$$

Satz 8.3. *Es gilt:*

1.

$$\int_C f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\ dt$$

2.

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{C^*} u(x,y)\ dx - v(x,y)\ dy + i \int_{C^*} v(x,y)\ dx + u(x,y)\ dy$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\ dt = \int_a^b \Big[u(\gamma^*(t)) + iv(\gamma^*(t))\Big]\Big[\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\Big]\ dt \\
&= \int_a^b \Big[u(\gamma^*(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma^*(t))\gamma_2'(t)\Big]\ dt + i \int_a^b \Big[u(\gamma^*(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma^*(t))\gamma_1'(t)\Big]\ dt \\
&= \int_a^b \begin{bmatrix} u(\gamma^*(t)) \\ -v(\gamma^*(t)) \end{bmatrix} \cdot (\gamma^*)'(t)\ dt + i \int_a^b \begin{bmatrix} v(\gamma^*(t)) \\ u(\gamma^*(t)) \end{bmatrix} \cdot (\gamma^*)'(t)\ dt \\
&= \int_{C^*} u(x,y)\ dx - v(x,y)\ dy + i \int_{C^*} v(x,y)\ dx + u(x,y)\ dy.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 8.1. *Sei $m \in \mathbb{Z}$. Berechne*

$$\int_C (z - z_0)^m \; dz$$

für die Kurve C, die durch die Parametrisierung $\gamma\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + r\, e^{i\,t} = z_0 + r(\cos t + i\, \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$ gegeben ist.

$$\begin{aligned}
\int_C (z - z_0)^m \; dz &= \int_{-\pi}^{\pi} r^m e^{i\,mt} r\, i\, e^{i\,t} \; dt = i\, r^{m+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,(m+1)t} \; dt \\
&= i\, r^{m+1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((m+1)t\big) \; dt + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\big((m+1)t\big) \; dt \right) \\
&= i\, r^{m+1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\big((m+1)t\big) \; dt = \begin{cases} 0 & \textit{für } m \neq -1 \\ 2\pi\, i & \textit{für } m = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Also gilt im Speziellen:

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} \; dz = 2\pi\, i.$$

Beispiel 8.2. *Sei $z = re^{i\,\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Berechne*

$$\int_{C_z} \frac{1}{w} \; dw.$$

für die KLurve $C_z = C_1 + C_2$ mit den Parametrisierungen $\gamma_1\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{i\,t\varphi}$ für C_1 und $\gamma_2\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = ((1 - t) + tr)e^{i\,\varphi}$ für C_2.

$$\begin{aligned}
\int_{C_z} \frac{1}{w} \; dw &= \int_{C_1} \frac{1}{w} \; dw + \int_{C_2} \frac{1}{w} \; dw \\
&= \int_0^1 e^{-i\,t\varphi} \varphi\, i\, e^{i\,t\varphi} \; dt + \int_0^1 \frac{1}{(1 - t) + tr} e^{-\varphi\, i} (r - 1) e^{i\,\varphi} \; dt \\
&= i\,\varphi + \int_0^1 \frac{r - 1}{1 + (r - 1)t} \; dt \\
&= i\,\varphi + \ln(1 + (r - 1)t)\Big|_0^1 = \ln r + i\,\varphi = \ln|z| + i\, \arg(z).
\end{aligned}$$

8.3 Der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel

Satz 8.4 (Cauchyscher Integralsatz)**.** *Sei D ein sternförmiges Gebiet und sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$* ***holomorph*** *auf D. Dann ist das komplexe Kurvenintegral $\int_C f(z) \; dz$ wegunabhängig und f besitzt eine Stammfunktion $F\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$. Im Speziellen ist $F(z) = \int_a^z f(w) \; dw$ eine Stammfunktion von f, also $F(z)' = f(z)$.*

Beweis. Es gilt

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{C^*} u(x,y)\ dx - v(x,y)\ dy + i \int_{C^*} v(x,y)\ dx + u(x,y)\ dy.$$

Es genügt also, die Wegunabhängigkeit der beiden reellen Kurvenintegrale zu untersuchen. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass f stetig differenzierbar ist. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ -v(x,y) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v(x,y) \\ u(x,y) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind diese Jacobi-Matrizen symmetrisch. Dann folgt die Wegunabhängigkeit sofort aus dem Satz 7.6.

Es gilt: $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ mit

$$U(x,y) = \int_{a^*}^{\binom{x}{y}} u(s,t)\ ds - v(s,t)\ dt \quad \text{und} \quad V(x,y) = \int_{a^*}^{\binom{x}{y}} v(s,t)\ ds + u(s,t)\ dt.$$

Wegen Satz 7.6 gilt:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = u(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -v(x,y)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = v(x,y), \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = u(x,y)$$

Also sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $F(z)$ erfüllt, $F(z)$ ist komplex differenzierbar und es gilt:

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = f(z).$$

□

Also gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch in $\mathbb{C}$. Im Speziellen folgt

$$\int_a^b F'(z)\ dz = \int_a^b f(z)\ dz = F(b) - F(a)$$

für holomorphe Funktionen f mit Stammfunktion F.

Daraus folgen für die Integration in $\mathbb{C}$ die analogen Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$:

- Linearität, partielle Integration, Substitutionsregel
- $$\left| \int_C f(z)\ dz \right| \leq |C|\ \max\{|f(z)|\colon z \in C\}.$$
- Stammfunktionen von z^m mit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ und $\cosh z$ wie in $\mathbb{R}$.

Beispiel

Für $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 0\}$ gilt für die Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$:

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{w}\, dw = \ln|z| + i \arg z.$$

Das motiviert die folgende Definition der komplexen Logarithmusfunktion für $z \in D$:

$$\ln z \equiv \ln|z| + i \arg z.$$

Dann gilt wegen des letzten Satzes:

$$\boxed{(\ln z)' = \frac{1}{z}}$$

Weitere Eigenschaften der komplexen Logarithmusfunktion: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$ und daher

$$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i \arg z} = e^{\ln|z|} e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi} = z.$$

Für $z = x + i\,y$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (-\pi, \pi]$ folgt $e^z = e^x e^{i\,y}$, also $|e^z| = e^x$ und $\arg(e^z) = y$ und daher:

$$\ln e^z = \ln e^x + i \arg(e^z) = x + i\,y = z.$$

Satz 8.5 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben)**.** *Sei D eine offene Menge, sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in D. Sei $z_0 \in D$ und $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$. Dann gilt für die positiv orientierte Randkurve C von $K_r(z_0)$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz \\ &= f(z_0) + \frac{1}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine abgeschlossene Kreisscheibe $K_\delta(z_0) \subset D$ mit Radius δ und Mittelpunkt z_0, sodass

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in K_\delta(z_0).$$

Sei C_δ die positiv orientierte Randkurve von $K_\delta(z_0)$. Daraus folgt für alle $z \in C_\delta$:

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Wegen

$$\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

gilt:

$$\left|\frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi\, i}\int_{C_\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \frac{\varepsilon}{2\pi\delta}|C_\delta| = \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

- Die Cauchysche Integralformel gilt für alle geschlossene Kurven C, die den Punkt z_0 „einmal im Gegenuhrzeigersinn umkreisen". Also gilt für eine derartige Kurve C:

  $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

  für alle Punkte z_0 aus dem Innengebiet der Kurve C. Das zeigt, dass die Werte einer holomorphen Funktion im Innenbereich der Kurve C durch ihre Werte auf C bereits eindeutig bestimmt sind.

- Aus der Cauchyschen Integralformel lässt sich eine entsprechende Formel für die Ableitung herleiten:

  $$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

  Beweis.

  $$\begin{aligned} & f(z_0+h) - f(z_0) - \left(\frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\right) h \\ &= \frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(z)\left[\frac{1}{z-z_0-h} - \frac{1}{z-z_0} - \frac{h}{(z-z_0)^2}\right] dz \\ &= \frac{h^2}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\,dz = r(h) \end{aligned}$$

  Daraus erkennt man sofort, dass

  $$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0.$$

  □

- Allgemeiner gilt: Eine holomorphe Funktion ist unendlich oft differenzierbar mit

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\, i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

  Somit besitzt jede holomorphe Funktion eine Taylor-Reihe.

- Die zugeordneten reellen Funktionen $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+i\,y)$ und $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+i\,y)$ sind dann ebenfalls unendlich oft differenzierbar. Diese Funktionen erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Daraus folgt:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

  Analog erhält man:

$$\Delta v = 0.$$

  Die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ erfüllen also die Laplace-Gleichung. Funktionen, die die Laplace-Gleichung erfüllen, heißen harmonische Funktionen.

8.4 Der Residuensatz

Definition 8.3. *Sei C eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \notin C$. Dann heißt*

$$n(C, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-z_0}\, dz$$

die Windungszahl von C bezüglich z_0.

Alternative Namen: Umlaufzahl, Index

Beispiele

- Sei $C = \partial K_r(z_0)$ die positiv orientierte Randkurve der Kreisscheibe $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-z_0| \le r\}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Dann gilt:

$$n(C, z_0) = 1.$$

- Für die entsprechende negativ orientierte Randkurve gilt:

$$n(-C, z_0) = -1.$$

- Für die k-mal durchlaufende Randkurve mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$n(k\,C, z_0) = k.$$

- Allgemein gilt für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve in C:

$$n(C, z_0) \in \mathbb{Z},$$

wobei $n(C, z_0)$ die Anzahl der Umläufe von C um z_0 bezeichnet.

Definition 8.4. *Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_0 \in D$. Sei $\partial K_r(z_0)$ die positiv orientierte Randkurve der Kreisscheibe $K_r(z_0) \subset D$. Dann heißt*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} f(z)\ dz$$

das Residuum von f im Punkt z_0.

Das Residuum einer in ganz D holomorphen Funktion ist in jedem Punkt $z_0 \in D$ gleich 0.

Satz 8.6 (Residuensatz)**.** *Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ holomorph und sei C eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $z_k \notin C$, die sich in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} n(C, z_k) \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Beweis. Geometrischer Beweis. □

Berechnung des Residuums

Angenommen, die Funktion lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$f(z) = \frac{g_k(z)}{(z - z_k)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und einer Funktion $g_k(z)$, die in einer Kreisscheibe $K_r(z_0)$ um z_k holomorph ist. Dann gilt:

$$\operatorname{res}_{z_k} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} f(z)\ dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{g_k(z)}{(z - z_k)^n}\ dz = \frac{g_k^{(n-1)}(z_k)}{(n-1)!} \tag{8.1}$$

Anwendungen

- Berechnung von Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\ dx \quad \text{mit} \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\deg Q \geq \deg P + 2 \quad \text{und} \quad Q(x) \text{ besitzt keine reellen Nullstellen.}$$

Seien $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Nullstellen von $Q(z)$. Sei C die positiv orientierte Randkurve von $H = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq r,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Dabei sei r so groß, dass alle Nullstellen z_k mit $\operatorname{Im} z_k > 0$ in H liegen.

Aus dem Residuensatz folgt:

$$\int_C R(z)\ dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im} z_k > 0}}^{n} \operatorname{res}_{z_k} R.$$

Es gilt $C = C_1 + C_2$ mit C_1 als dem Teil auf der reellen Achse bezeichnet und C_2 dem übrig bleibenden Halbkreis. Also:

$$\int_C R(z)\ dz = \int_{C_1} R(z)\ dz + \int_{C_2} R(z)\ dz$$

Es gilt

$$\int_{C_1} R(z)\ dz = \int_{-r}^{r} R(x)\ dx \to \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\ dx \quad \text{für } r \to \infty$$

und

$$\int_{C_2} R(z)\ dz \to 0 \quad \text{für } r \to \infty,$$

weil für $z \in C_2$ gilt:

$$|R(z)| = \frac{1}{r^2} \frac{|P(z)z^2|}{|Q(z)|} \leq \frac{c}{r^2}$$

mit einer Konstanten $c > 0$, woraus folgt

$$\left| \int_{C_2} R(z)\ dz \right| \leq \max\left\{ |R(z)| \colon z \in C_2 \right\} |C_2| \leq \frac{c}{r^2} \pi r = \frac{c\,\pi}{r} \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

Also

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\ dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im} z_k > 0}}^{n} \operatorname{res}_{z_k} R}$$

Sei z_k eine n-fache Nullstelle von $Q(z)$. Dann gilt

$$Q(z) = (z - z_k)^n S_k(z),$$

wobei $S_k(z)$ ein Polynom mit $S(z_k) \neq 0$ ist. Es folgt

$$R(z) = \frac{g_k(z)}{(z - z_k)^n} \quad \text{mit} \quad g_k(z) = \frac{P(z)}{S_k(z)}$$

und das Residuum lässt sich leicht mit Hilfe der Formel (8.1) berechnen:

$$\operatorname{res}_{z_k} R = \frac{g_k^{(n-1)}(z_k)}{(n-1)!}$$

Besonders einfach ist der Fall $n = 1$ (einfache Nullstelle): Wegen

$$Q(z) = (z - z_k) S_k(z)$$

folgt durch Differentiation:

$$Q'(z) = S_k(z) + (z - z_k) S_k'(z), \quad \text{also} \quad Q'(z_k) = S_k(z_k)$$

und somit

$$\operatorname{res}_{z_k} R = g_k(z_k) = \frac{P(z_k)}{S_k(z_k)} = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}.$$

Beispiel 8.3. *Berechne* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$*.*

$$R(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Nullstellen von $Q(z)$*:* $z_1 = i$, $z_2 = -i$*: Also*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} R.$$

Es gilt:

$$\operatorname{res}_{z_1} R = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{2z_1} = \frac{1}{2i}.$$

Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \, \frac{1}{2i} = \pi.$$

Beispiel 8.4. *Berechne* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$*.*

$$R(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

Nullstellen von $Q(z)$*:*

$$z^4 = r^4 e^{i\,4\varphi} = -1 = e^{i\,\pi} \Longrightarrow r = 1,\ 4\varphi = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Also

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\,\pi}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\,\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\,\pi}{2}\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

d.h.:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),\ z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Es folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\,\left(\operatorname{res}_{z_0} R + \operatorname{res}_{z_1} R\right).$$

Man erhält:

$$\operatorname{res}_{z_k} R = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Beispiel 8.5. *Berechne* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx.$

$$R(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$$

Nullstellen von $Q(z)$: $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Also

$$Q(z) = (z-z_1)^3(z-z_2)^3.$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} R.$$

Für das Residuum erhält man:

$$\operatorname{res}_{z_1} R = \frac{g_1''(z_1)}{2!} \quad \mathit{mit} \quad g_1(z) = \frac{1}{(z-z_2)^3} = \frac{1}{(z+i)^3}.$$

Es gilt

$$g_1''(z_1) = \frac{12}{(z_1+i)^5} = \frac{12}{(2i)^5} = \frac{3}{8\,i}$$

Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx = 2\pi i\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{8\,i} = \frac{3\pi}{8}.$$

- Berechnung von Integralen der Form

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\ dt \quad \text{mit} \quad r(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)},$$

wobei $p(x,y)$ und $q(x,y)$ Polynome sind.
Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\ dt = \int_0^{2\pi} r\left(\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})\right)\ dt = \int_C f(z)\ dz$$

mit der positiv orientierten Randkurve C des komplexen Einheitskreises und

$$f(z) = \frac{1}{iz} r\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right).$$

Beispiel 8.6. *Berechne* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\ dt.$

$$f(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} = \frac{2}{i}\frac{1}{z^2+4z+1}$$

Nullstellen von $Q(z) = z^2+4z+1$*:* $z_1 = -2+\sqrt{3}$, $z_2 = -2-\sqrt{3}$.

$$\int_C f(z)\ dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f = 2\pi i \frac{2}{i}\frac{1}{2z_1+4} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

- Fourier-Transformation: Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Die Funktion $\hat{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, gegeben durch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx,$$

heißt die Fourier-Transformierte von f, sofern sie wohldefiniert ist.

  - Rationale Funktionen:

$$f(z) = R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome sind, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\deg Q \geq \deg P + 1 \quad \text{und} \quad Q(x) \text{ besitzt keine reellen Nullstellen.}$$

Seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Nullstellen von $Q(z)$.

Ähnlich wie vorhin zeigt man:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{-i\omega x}\,dx = \begin{cases} -2\pi i \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \operatorname{Im} z_k<0}}^{n} \operatorname{res}_{z_k}(R(z)e^{-i\omega z}) & \text{für } \omega>0 \\ 2\pi i \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \operatorname{Im} z_k>0}}^{n} \operatorname{res}_{z_k}(R(z)e^{-i\omega z}) & \text{für } \omega<0 \end{cases}}$$

Berechnung des Residuums bei einfachen Nullstellen:

$$\operatorname{res}_{z_k}\left(R(z)e^{-i\omega z}\right) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}e^{-i\omega z_k}.$$

Beispiel 8.7. *Berechne die Fourier-Transformierte von* $R(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.
Nullstellen von $Q(z)$*:*

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i.$$

Es folgt:

$$\operatorname{res}_{z_1}\left(R(z)e^{-i\omega z}\right) = \frac{1}{2i}e^{\omega} \quad \textit{und} \quad \operatorname{res}_{z_2}\left(R(z)e^{-i\omega z}\right) = -\frac{1}{2i}e^{-\omega}.$$

Also

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{-i\omega x}\,dx &= \begin{cases} -2\pi i \operatorname{res}_{z_2}\left(R(z)e^{-i\omega z}\right) = \pi\, e^{-\omega} & \textit{für } \omega>0 \\ +2\pi i \operatorname{res}_{z_1}\left(R(z)e^{-i\omega z}\right) = \pi\, e^{\omega} & \textit{für } \omega<0 \end{cases} \\ &= \pi\, e^{-|\omega|} = \hat{R}(\omega).\end{aligned}$$

Beispiel 8.8. *Berechne die Fourier-Transformierte von* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ *(Gaußsche Glockenkurve).*
Es gilt:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx\end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Also

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Kapitel 9

Eine axiomatische Einführung der reellen Zahlen

9.1 Die Axiome

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit den binären Operationen $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Addition, Schreibweise $x + y$ für $+(x, y)$) und $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Multiplikation, Schreibweise $x \cdot y$ für $\cdot(x, y)$) ist ein Körper:

- Eigenschaften der Addition:
  - Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$\boxed{x + (y + z) = (x + y) + z} \tag{K1}$$
  - Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$\boxed{x + y = y + x} \tag{K2}$$
  - Neutrales Element: Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$\boxed{x + 0 = x} \tag{K3}$$
  - Inverses Element: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
  $$\boxed{x + y = 0} \tag{K4}$$
- Eigenschaften der Multiplikation:
  - Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$\boxed{x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z} \tag{K5}$$

- Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{x \cdot y = y \cdot x} \tag{K6}$$

- Neutrales Element: Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{x \cdot 1 = x} \tag{K7}$$

- Inverses Element: Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\boxed{x \cdot y = 1} \tag{K8}$$

• Verträglichkeitsbedingung:

  - Distributivgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)} \tag{K9}$$

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besitzt eine Relation $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Schreibweise $x \leq y$ für $(x, y) \in \leq$) mit folgenden Eigenschaften:

• Die Relation ist eine Ordnungsrelation (partielle Ordnung, Halbordnung)

  - Reflexivität: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{x \leq x} \tag{O1}$$

  - Transitivität: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)} \tag{O2}$$

  - Antisymmetrie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)} \tag{O3}$$

• Die Ordnungsrelation $\leq$ ist eine lineare (totale) Ordnung:

  - Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(x \leq y) \vee (y \leq x)} \tag{O4}$$

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition $+$, der Multiplikation $\cdot$ und der linearen Ordnung $\leq$ ist ein geordneter Körper, d.h. es gelten zusätzlich folgende Eigenschaften:

• Verträglichkeitsbedingungen:

– Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)} \tag{OK1}$$

– Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{(x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow (x \cdot y > 0)} \tag{OK2}$$

mit der Schreibweise $x > 0$ für $0 \leq x \wedge x \neq 0$.

Für das letzte Axiom benötigt man folgende Begriffe:

Definition 9.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann heißt M nach oben beschränkt $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in M$ gilt:*

$$x \leq c.$$

Sei S die Menge aller solcher oberen Schranken c. Falls es ein $s \in S$ gibt, sodass für alle $c \in S$ gilt:

$$s \leq c,$$

dann heißt s das Supremum von M. Schreibweise: $s = \sup M$.

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition $+$, der Multiplikation $\cdot$ und der linearen Ordnung $\leq$ ist ein ordnungsvollständiger geordneter Körper, d.h. zusätzlich gilt:

- Ordnungsvollständigkeit:

  – Für alle nicht-leeren und nach oben beschränkte Mengen $M \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{\sup M \text{ existiert in } \mathbb{R}} \tag{OV}$$

Die Rechenregeln (K1) - (K9), (O1) - (O4), (OK1), (OK2), (OV) sind die Axiome unserer Theorie der reellen Zahlen. Diese Axiome werden ohne Nachweis als wahr postuliert. Weitere Aussagen in dieser Theorie gelten als wahr, wenn sie durch logisches Schließen aus diesen Axiomen oder aus bereits als wahr bewiesen Aussagen begründet werden können.

Einige Beispiele von Folgerungen:

- Es gibt nur ein neutrales Elemente 0 (1) und es gibt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) nur ein inverses Element $-x$ ($\frac{1}{x}$).

  Beweis. Angenommen, es gibt ein weiteres neutrales Element $\tilde{0} \neq 0$ der Addition. Dann folgt:

$$0 + \tilde{0} = 0$$

Andererseits folgt aus (K2) und (K3):

$$0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}.$$

Also

$$0 = \tilde{0}$$

Widerspruch.

Sei $x \in \mathbb{R}$ und seien $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene inverse Elemente von x bezüglich der Addition. Dann gilt einerseits wegen (K3) und (K2)

$$(x + y) + \tilde{y} = 0 + \tilde{y} = \tilde{y}$$

und andererseits wegen (K1), (K2) und (K3):

$$(x + y) + \tilde{y} = (x + \tilde{y}) + y = 0 + y = y$$

Widerspruch.

Die Aussagen zur Multiplikation folgen analog. $\square$

- Es gilt:

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Zu zeigen:

$$x \cdot y + x \cdot (-y) = 0$$

Aus (K9) und (K4) folgt:

$$x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0.$$

Nun gilt wegen (K3) und (K9):

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Daher folgt wegen (K4), (K1) und (K3)

$$0 = x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

- Bezeichnungen $x < y$ für $x \leq y$ und $x \neq y$, $x \geq y$ für $y \leq x$ und $x > y$ für $x \geq y$ und $x \neq y$. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$:

$$x \cdot x > 0.$$

Beweis. Wegen (04) gilt:

$$x \leq 0 \quad \text{oder} \quad 0 \leq x$$

Wegen (OK1) folgt aus $x \leq 0$: $0 \leq -x$. Also gilt wegen $x \neq 0$ und $-x \neq 0$:

$$-x > 0 \quad \text{oder} \quad x > 0.$$

Aus (OK2) und dem obigen Ergebnis folgt dann im ersten Fall:

$$x \cdot x = (-x) \cdot (-x) > 0.$$

Im zweiten Fall folgt die Behauptung direkt aus (OK2). □

Folgerung: Enthält ein Körper ein Element i mit $i \cdot i < 0$, dann gibt es keine lineare Ordnung, sodass dieser Körper ein geordneter Körper ist.

Für die Diskussion des Grenzwertbegriffes ist vor allem das Axiom (OV) von großer Bedeutung.

9.2 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen

Definition 9.2. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv* $\Leftrightarrow$

$$(1 \in M) \wedge (\text{ für alle } a \in M \text{ gilt: } (a+1) \in M)$$

Definition 9.3. *1.* $\mathbb{N} = \bigcap\{M \subset \mathbb{R} : M \text{ induktiv}\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}\}$

3. $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z} \vee n \in \mathbb{N}\}$

Die induktive Beschreibung von $\mathbb{N}$ wird auch für die Definition von Ausdrücken $T(n)$ und zum Beweis von Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eingesetzt.

- Beispiel Faktorielle: $1! = 1, \ (n+1)! = (n+1) \cdot n!$
- Beispiel Potenzen: $x^1 = x$, $x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Beispiel Binomischer Lehrsatz: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i \quad \text{mit} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

und den Vereinbarung $0! = 1$, $a^0 = b^0 = 1$.

Beweis. $n = 1$: trivial

Angenommen, die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$, also

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$$

Zu zeigen: Die Behauptung gilt auch für $n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} \cdot b^i + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} \cdot b^i \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right]}_{\binom{n+1}{i}} a^{n-i+1} \cdot b^i + b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} \cdot b^i
\end{aligned}$$

□

- Beispiel: Bernoullische Ungleichung: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x > -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

Beweis. $n = 2$:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

Angenommen, die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$, also

$$(1+x)^n > 1 + n \cdot x$$

Zu zeigen: Die Behauptung gilt auch für $n+1$:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x.$

□

Einfache Folgerung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Kapitel 10

Grenzwert

Eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to M$ heißt eine Folge in M. Im Speziellen diskutieren wir $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{R}^m$ oder $M = \mathbb{C}$.

Schreibweise: a_n für $a(n)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für a.

Beispiele:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = c \cdot q^n \text{ geometrische Folge}, \quad a_n = \Big(1 + \frac{r}{n}\Big)^n$$

Normen:

- Abstand zwischen zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$: $|y - x|$ mit

$$|d| = \begin{cases} d & \text{für } d \geq 0 \\ -d & \text{für } d < 0 \end{cases} \quad \text{für } d \in \mathbb{R};$$

  Alternative Schreibweise: $\|d\|$.

- Abstand zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$: $\|y - x\|$ mit

$$\|d\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} = \sqrt{d^T d} \quad \text{für } d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m;$$

- Abstand zwischen zwei komplexen Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$: $|y - x|$ mit

$$|d| = \sqrt{(\operatorname{Re} d)^2 + (\operatorname{Im} d)^2} \quad \text{für } d \in \mathbb{C}.$$

  Alternative Schreibweise: $\|d\|$.

Wir nennen in jedem dieser Fälle die Größe $\|d\|$ die Norm von $d \in M$. Die drei wichtigsten Eigenschaften:

1. $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in M$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|c\,x\| = |c|\|x\|$ für alle $c \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x \in M$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in M$.

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften sind klar. Zur dritten Eigenschaft (Dreiecksungleichung):

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y)^T(x+y) = x^Tx + y^Tx + x^Ty + y^Ty \\ &= \|x\|^2 + 2x^Ty + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

wegen Schwarz-Cauchyschen Ungleichung. □

10.1 Konvergenz von Folgen

Definition 10.1. *Sei M eine der Mengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}$ mit der dazugehörigen Norm $\|.\|$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $a \in M$.*

1. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow$ Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:*
$$\|a_n - a\| < \varepsilon.$$
a heißt Grenzwert der Folge. Schreibweisen: $a_n \longrightarrow a$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
2. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $a \in M$, sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.*

Satz 10.1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beweis. Wir zeigen zunächst: Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Angenommen, das ist nicht wahr, d.h.: es gibt ein $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$, sodass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1}{n_0} \geq \varepsilon, \quad \text{also} \quad n_0 \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Das hätte zur Folge, dass $\mathbb{N}$ beschränkt wäre. Dann würde $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ existieren. Aus der Definition des Supremums folgt, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$s - 1 < m.$$

(Sonst wäre auch $s - 1$ eine obere Schranke.) Wegen $m \in \mathbb{N}$ folgt $m + 1 \in \mathbb{N}$ und daher $m + 1 \leq s$. Widerspruch.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt dann:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

□

Satz 10.2. *Eine konvergente Folge besitzt nur einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen, eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt zwei verschiedene Grenzwerte a und $\tilde{a}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0 \quad \text{und} \quad \|a_n - \tilde{a}\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq \tilde{n}_0.$$

Dann folgt für $m = \max(n_0, \tilde{n}_0)$:

$$\|a - \tilde{a}\| = \|a - a_m + a_m - \tilde{a}\| \leq \|a - a_m\| + \|a_m - \tilde{a}\| < 2\varepsilon.$$

Für die Wahl $\varepsilon = \|a - \tilde{a}\|/2$ erhält man einen Widerspruch. $\square$

Satz 10.3. 1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$, $a_n^{(i)}$ bezeichne die i-te Komponente von a_n. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{(i)} = a^{(i)} \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

wobei $a^{(i)}$ die i-te Komponente von a bezeichnet.

2. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a).$$

Beweis. Aus $a_n \longrightarrow a$ folgt: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$\|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Wegen

$$|a_n^{(i)} - a^{(i)}| \leq \|a_n - a\|$$

folgt sofort: $a_n^{(i)} \longrightarrow a^{(i)}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Umgekehrt gilt: Falls $a_n^{(i)} \longrightarrow a^{(i)}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, so gibt es für jedes $\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varepsilon} > 0$ gibt es ein $n_i \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_i$ gilt:

$$|a_n^{(i)} - a^{(i)}| < \tilde{\varepsilon}.$$

Wegen

$$\|a_n - a\| \leq \sqrt{m} \max_{i\in\{1,2,\ldots,m\}} |a_n^{(i)} - a^{(i)}|$$

folgt für $n_0 = \max\{n_i : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$:

$$\|a_n - a\| < \sqrt{m}\,\tilde{\varepsilon}.$$

Für die Wahl $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{m}$ folgt die Behauptung.

Der Beweis für Folgen in $\mathbb{C}$ ist völlig analog. $\square$

Es genügt also, Rechenregeln für reelle Folgen zu beweisen. Dann folgt eine entsprechende Rechenregel für Folgen in $\mathbb{R}^m$ und in $\mathbb{C}$ durch komponentenweise Anwendung.

Definition 10.2. *Eine Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt $\Leftrightarrow$ Die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben (unten) beschränkt.*

Satz 10.4. *Eine konvergente Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei a der Grenzwert. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann folgt:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dann gilt offensichtlich für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| \leq c = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}.$$

□

Satz 10.5. *Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $a_n + b_n \longrightarrow a + b$
2. $c \cdot a_n \longrightarrow c \cdot a$
3. $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$
4. *Falls* $b \neq 0$, *gilt:* $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.
5. $|a_n| \longrightarrow |a|$

Beweis. Zu 3.: Zu jedem $\varepsilon' > 0$ gilt es ein $n_0' \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon' \quad \text{für alle } n \geq n_0'.$$

Zu jedem $\varepsilon'' > 0$ gilt es ein $n_0'' \in \mathbb{N}$, sodass

$$|b_n - b| < \varepsilon'' \quad \text{für alle } n \geq n_0''.$$

Außerdem ist (b_n) beschränkt: Es gibt ein $c_b > 0$ mit

$$|b_n| \leq c_b \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt für $n \geq n_0 = \max(n_0', n_0'')$:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \\ &\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| < \varepsilon' \cdot c_b + |a| \cdot \varepsilon'' \end{aligned}$$

Die Aussage folgt für $\varepsilon' = \varepsilon/(2c_b)$ und $\varepsilon'' = \varepsilon/(2|a|)$. Die anderen Regeln lassen sich analog beweisen. □

Weitere leicht zu beweisende Rechenregeln:

Satz 10.6. *1. Seien (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$. Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$, dann gilt $a \leq b$.*

2. Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow a$. Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n \leq c_n \leq b_n$, dann gilt $c_n \longrightarrow a$.

3. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow 0$ (Nullfolge) und sei (b_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt $a_n \cdot b_n \longrightarrow 0$.

Beispiele:

1.
$$\frac{1-3n+n^2}{1+2n^2} = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n} + 1}{\frac{1}{n^2} + 2} \longrightarrow \frac{0-0+1}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

2.
$$\frac{1-3n}{1+2n^2} = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2} + 2} \longrightarrow \frac{0-0+0}{0+2} = 0.$$

3.
$$\frac{1-3n+n^3}{1+2n^2} = n \cdot \underbrace{\frac{1-3n+n^3}{n+2n^3}}_{\longrightarrow \frac{1}{2}} \quad \text{unbeschränkt}$$

4.
$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n}, \quad \text{also} \quad \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad \text{unbeschränkt}$$

5.
$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^n} \leq \frac{1}{1-\frac{n}{n^2+1}} \longrightarrow 1.$$

Also
$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1$$

6.
$$\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0.$$

7. Aus dem Binomischen Lehrsatz folgt:

$$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n \geq 1 + \binom{n}{1}\sqrt{\frac{2}{n}} + \binom{n}{2}\frac{2}{n} = 1 + \sqrt{2n} + n - 1 \geq n$$

   Daher

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$$

   Daraus folgt:

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

Die nächsten Sätze liefern Bedingungen, aus denen auf die Existenz eines Grenzwertes geschlossen werden kann, ohne dass man den Grenzwert kennen muss:

10.2 Monotone Folgen, Teilfolgen und Cauchy-Folgen

Definition 10.3. *Eine Folge (a_n) heißt*

1. *monoton wachsend* $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,
2. *streng monoton wachsend* $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,
3. *monoton fallend* $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,
4. *streng monoton fallend* $\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,

Satz 10.7. 1. *Sei (a_n) eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Dann besitzt (a_n) einen Grenzwert und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. *Sei (a_n) eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge. Dann besitzt (a_n) einen Grenzwert und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Zu 1.: Sei $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nach der Definition des Supremums gilt für alle $\varepsilon > 0$: $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{n_0} > a - \varepsilon.$$

Daraus folgt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| = a - a_n \leq a - a_{n_0} < \varepsilon.$$

Der Beweis für den 2. Teil ist völlig analog. $\square$

Anwendung: Newton-Verfahren und Wurzelfunktionen

Das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Lösung einer Gleichung

$$f(x) = 0$$

lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.

Wir suchen nach der Umkehrfunktion der Potenzfunktion. Die Funktionsgleichung der Potenzfunktion mit Exponent $k \in \mathbb{N}$ lautet $y = x^k$. Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion lautet

$$x = y^k$$

Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gegeben und $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ ist gesucht. Das Newton-Verfahren für die Gleichung

$$y^k - x = 0$$

lautet:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{(y_n)^k - x}{k \cdot (y_n)^{k-1}} = \frac{k-1}{k}\, y_n + \frac{x}{k \cdot (y_n)^{k-1}}$$

Wählt man den Startwert y_0 so, dass $(y_0)^k \geq x$, dann ist die Folge (y_n) monoton fallend und nach unten (durch 0) beschränkt. Daher existiert der Grenzwert y. Es gilt für diesen Grenzwert:

$$y = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[y_n - \frac{(y_n)^k - x}{k \cdot (y_n)^{k-1}} \right] = y - \frac{y^k - x}{k \cdot y^{k-1}},$$

also

$$y^k = x.$$

Wegen der strengen Monotonie der Potenzfunktion für Exponenten $k \in \mathbb{N}$, d.h.:

$$0 < y < \bar{y} \Rightarrow y^k < \bar{y}^k$$

gibt es nur eine positive Lösung der Gleichung $y^k = x$ für $x > 0$. Bezeichnung

$$y = x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$$

Erweiterung von Potenzen für rationale Exponenten:

Man vereinbart $a^0 = 1$ für $a > 0$.

Sei $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, m und n teilerfremd. Wir definieren:

$$a^r = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

Die uns schon bekannten Rechenregeln, z.B.:

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s \quad \text{und} \quad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{Q}$$

lassen sich leicht nachweisen, in dem man mit dem Fall $r, s \in \mathbb{N}$ beginnt, mit $r, s \in \mathbb{Z}$ fortsetzt und schließlich auf $r, s \in \mathbb{Q}$ erweitert.

Analoges gilt für die Monotonieaussagen, z.B.: Für alle $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$ gilt:

$$0 < a < b \Rightarrow a^r < b^r.$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und alle $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$r < s \Rightarrow a^r < a^s.$$

Satz 10.8. *Sei $a > 0$ und (x_n) eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$ und $x \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$a^{x_n} \to a^x.$$

Beweis. Die Aussage wird zunächst für die spezielle Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gezeigt: Es gilt

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{\frac{1}{a} - 1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{a}$$

Daher

$$\frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{a}-1}{n}} \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$$

Daraus folgt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \to 1.$$

und natürlich auch

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1.$$

Sei nun (x_n) eine beliebige Nullfolge in $\mathbb{Q}$. Es genügt den Fall $a > 1$ zu betrachten. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|a^{-\frac{1}{m_0}} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|a^{\frac{1}{m_0}} - 1\right| < \varepsilon.$$

Zu diesem m_0 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n| < \frac{1}{m_0} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Wegen der Monotonie gilt:

$$a^{-\frac{1}{m_0}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{m_0}}.$$

Also:

$$a^{x_n} - 1 < a^{\frac{1}{m_0}} - 1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad 1 - a^{x_n} < 1 - a^{-\frac{1}{m_0}} < \varepsilon$$

d.h.:

$$|a^{x_n} - 1| < \varepsilon$$

Sei schließlich (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{Q}$. Dann ist $(x_n - x)$ eine Nullfolge und es gilt:

$$a^{x_n} = a^x \cdot a^{x_n - x} \to a^x \cdot 1 = a^x.$$

$\square$

Erweiterung von Potenzen für reelle Exponenten:

Sei $a > 1$ und $r \in \mathbb{R}$. Aus den Axiomen der reellen Zahlen lässt sich begründen, dass es eine monoton wachsende Folge (r_n) in $\mathbb{Q}$ gibt mit

$$r_n \to r.$$

Dann ist die Folge (a^{r_n}) ebenfalls monoton wachsend und nach oben beschränkt. Also existiert der Grenzwert, der als a^r bezeichnet wird:

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Die Definition von a^r hängt nicht von der konkret gewählten Folge (r_n) ab: Sei (r'_n) eine zweite Folge mit $r'_n \to r$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{r_n} \cdot a^{r'_n - r_n} \right) = a^r \cdot 1.$$

Die Erweiterung für $0 < a < 1$ erfolgt analog.

Die uns schon bekannten Rechenregeln und Monotonieaussagen für Potenzen gelten auch für reelle Exponenten. Der Beweis erfolgt durch Grenzübergang.

Damit sind Potenzfunktionen

$$x \mapsto x^r \quad \text{für } x > 0,\ r \in \mathbb{R},\ r \neq 0$$

und Exponentialfunktionen

$$x \mapsto a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

verfügbar.

Eine weitere Rechenregel zum Grenzwert:

Satz 10.9. *Sei $a > 0$ und (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to x$. Dann gilt*

$$a^{x_n} \to a^x.$$

Beweis.

$$a^{x_n} = a^x \cdot a^{x_n - x}$$

$(x_n - x)$ ist eine Nullfolge. Genau wie für Nullfolgen rationaler Zahlen folgt

$$a^{x_n - x} \to 1.$$

$\square$

Besonders wichtig ist die Exponentialfunktion e^x:

Die Folge (a_n) mit
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
ist monoton wachsend und nach oben beschränkt (siehe Übung) und daher nach Satz 10.7 konvergent. Der Grenzwert wird mit e bezeichnet und heißt Eulersche Zahl:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459...$$

Logarithmusfunktionen

Die Umkehrfunktion von Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$.

Funktionsgleichung der Exponentialfunktion: $y = a^x$

Wir diskutieren die Lösbarkeit der Gleichung
$$x = a^y$$
bezüglich y für gegebenes $x > 0$ mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens (Bisektion):

Wir betrachten den Fall $a > 1$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$ gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$a^{-m_0} < x \quad \text{und} \quad a^{-n_0} < \frac{1}{x},$$
also
$$a^{-m_0} \leq x \leq a^{n_0}.$$
Wir haben damit ein erstes Intervall $[y_1, y_1']$ mit $y_1 = -m_0$ und $y_1' = n_0$ gefunden, in dem wir die Lösung y vermuten. Durch sukzessive Halbierung erzeugt man eine Folge von Intervallen $[y_k, y_k']$ mit $y_k' - y_k \to 0$ und
$$a^{y_k} \leq x \leq a^{y_k'},$$
wobei die Folgen (y_k) und (y_k') rekursiv gegeben sind: Angenommen
$$a^{y_k} \leq x \leq a^{y_k'}.$$
Sei m_{k+1} der Mittelpunkt des Intervalls $[y_k, y_k']$. Dann setzt man:
$$y_{k+1} = y_k, \quad y_{k+1}' = m_{k+1} \quad \text{falls} \quad x \leq a^{m_{k+1}}$$
bzw.:
$$y_{k+1} = m_{k+1}, \quad y_{k+1}' = y_k' \quad \text{falls} \quad x > a^{m_{k+1}}$$
Nach Satz 10.7 besitzen die Folgen (y_k) und (y_k') einen gemeinsamen Grenzwert y, für den man durch Grenzübergang erhält:
$$a^y = x.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Monotonie der Exponentialfunktion

$$y < y' \Rightarrow a^y < a^{y'}.$$

Damit ist die Logarithmusfunktion $\log_a$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion wohldefiniert. Die bekannten Rechengesetze lassen sich aus den Rechengesetzen der Exponentialfunktion ableiten.

Der Fall $a < 1$ lässt sich auf den obigen Fall zurückführen:

$$a^y = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{x}.$$

Eine weitere Rechenregel:

Satz 10.10. *Sei (x_n) eine Folge positiver Zahlen mit Grenzwert $x > 0$. Dann gilt:*

$$\log_a x_n \to \log_a x.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $a > 1$ und $x = 1$. Zu zeigen: $\log_a x_n \to 0$, d.h.: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$-\varepsilon < \log_a x_n < \varepsilon.$$

Wegen der Monotonie ist diese Bedingung äquivalent zur Bedingung

$$a^{-\varepsilon} < x_n < a^{\varepsilon},$$

d.h.:

$$x_n - 1 < \underbrace{a^{\varepsilon} - 1}_{>0}. \quad \text{und} \quad 1 - x_n < \underbrace{1 - a^{-\varepsilon}}_{>0}$$

Wegen $x_n \to 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$x_n - 1 \leq |x_n - 1| < a^{\varepsilon} - 1 \quad \text{und} \quad 1 - x_n \leq |x_n - 1| < 1 - a^{-\varepsilon}.$$

Für allgemeines $x > 0$ folgt aus $x_n \to x$:

$$\frac{x_n}{x} \to 1$$

und daher

$$\log_a \frac{x_n}{x} \to 0$$

d.h.

$$\log_a x_n - \log_a x \to 0, \quad \text{also} \quad \log_a x_n \to \log_a x.$$

Der Fall $a < 1$ folgt analog. □

Daraus folgt sofort die nächste Rechenregel:

Satz 10.11. *Sei $r \in \mathbb{R}$ und sei (x_n) eine Folge positiver Zahlen mit Grenzwert $x > 0$. Dann gilt:*

$$(x_n)^r \to x^r.$$

Beweis.

$$(x_n)^r = a^{r \log_a x_n} \to a^{r \log_a x} = x^r.$$

□

Teilfolgen und Cauchy-Folgen

Definition 10.4. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beispiel:

Teilfolgen der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$:

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{2k} = \frac{1}{2k}, \quad a_{2^k} = \frac{1}{2^k}$$

Satz 10.12 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Aus jeder Folge lässt sich entweder eine monoton fallende oder eine monoton steigende Teilfolge auswählen: Sei

$$M = \{m \in \mathbb{N} : a_n < a_m \text{ für alle } n > m\}.$$

Zur Motivation von M: Wir könnten zunächst versuchen, beginnend mit a_m eine monoton wachsende Folge zu finden. Das funktioniert nicht für $m \in M$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Die Menge M ist beschränkt: Dann gilt für alle $k > \sup M$: Es gibt ein $k' \in \mathbb{N}$ mit $k' > k$ und
$$a_k \leq a_{k'}$$
In diesem Fall lässt sich also eine monoton wachsende Teilfolge auswählen.

2. Die Menge M ist unbeschränkt: Dann gibt es unendlich viele Zahlen
$$m_1 < m_2 < \dots$$
in M und es gilt nach Definition von M:
$$a_{m_1} > a_{m_2} > \dots$$
Also gibt es in diesem Fall eine streng monoton fallende Teilfolge.

Der Rest folgt aus Satz 10.7. □

Definition 10.5. *Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt eine Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt:*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz 10.13 (Cauchy-Kriterium)**.** *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$(a_n) \textit{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n) \textit{ ist eine Cauchy-Folge}$$

Beweis. Angenommen, $a_n \to a$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon'$$

Also gilt für $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon'$$

Die Behauptung folgt für $\varepsilon' = \varepsilon/2$.

Angenommen, (a_n) ist eine Cauchy-Folge. Dann zeigt man analog wie für konvergente Folgen, dass (a_n) beschränkt ist. Daher gibt es eine konvergente Teilfolge: $a_{n_k} \to a$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein k_0, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon'$$

Andererseits gibt es zu diesem $\varepsilon' > 0$ ein n_0, sodass für alle $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon'$$

Man wählt nun ein $k \geq k_0$, so dass $n_k \geq n_0$ ist. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon'.$$

Die Behauptung folgt für $\varepsilon' = \varepsilon/2$. □

Man sieht sofort, dass jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

Definition 10.6. *Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt a ein Häufungspunkt der Folge $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge, die gegen a konvergiert.*

Eine einfache Folgerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Definition 10.7. *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und H die Menge aller Häufungspunkte von (a_n).*

1. *Ist (a_n) nach oben beschränkt und $H \neq \emptyset$, dann heißt* $\sup H$ *der limes superior von (a_n). Schreibweise* $\limsup a_n$.

2. *Ist (a_n) nach unten beschränkt und $H \neq \emptyset$, dann heißt* $\inf H$ *der limes inferior von (a_n). Schreibweise* $\liminf a_n$.

Es lässt sich zeigen, dass $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ selbst Häufungspunkte der Folge (a_n) sind, also: $\limsup a_n$ ist der größte Häufungspunkt und $\liminf a_n$ ist der kleinste Häufungspunkt der Folge (a_n).

Eine einfache Folgerung:

Satz 10.14. *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und H die Menge aller Häufungspunkte von (a_n).*

1. *Ist (a_n) nach oben beschränkt und $H \neq \emptyset$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:*
$$a_n < \limsup a_n + \varepsilon$$
2. *Ist (a_n) nach unten beschränkt und $H \neq \emptyset$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:*
$$a_n > \liminf a_n - \varepsilon$$

Beweis. Zu 1.: Angenommen, es gibt unendlich viele Folgenglieder mit

$$a_n \geq \limsup a_n + \varepsilon.$$

Dann gibt es eine Teilfolge a_{n_k}, die gegen einen Häufungspunkt a konvergiert mit

$$a \geq \limsup a_n + \varepsilon.$$

Widerspruch. □

10.3 Unendliche Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$$

die unendliche Reihe mit den Gliedern a_n. Bezeichnung:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Häufig werden Folgen und Reihen auch für Indizes aus $\mathbb{N}_0$ betrachtet.

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert konvergiert, schreibt man anstelle von

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Beispiel

Sei $q \in \mathbb{R}$. Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_n = q^n.$$

Die Reihe mit diesen Gliedern nennt man eine geometrische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots.$$

Für diese Reihe lässt sich leicht überprüfen, ob sie konvergiert. Für die Partialsummen gilt:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{falls } q \neq 1 \\ n & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Also konvergiert die Reihe genau dann, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall erhält man für den Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Satz 10.15. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow a_n \to 0.$$

Beweis. Es gilt:

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

Also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

□

Die Bedingung $a_n \to 0$ reicht allerdings nicht, um sicher zu sein, dass die Reihe konvergiert:

Beispiel

Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Die Reihe mit diesen Gliedern nennt man die harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots.$$

Offensichtlich gilt $a_n \geq 0$ und $a_n \to 0$.

Allgemein gilt für Reihen mit nicht-negativen Gliedern:

Satz 10.16. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe genau dann, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. Die Reihe ist monoton wachsend. Die Aussage folgt aus Satz 10.7. □

Wir nutzen nun zusätzlich aus, dass $a_n = \frac{1}{n}$ monoton fallend ist. Dann gilt für die Partialsumme s_n mit $n = 2^k$:

$$
\begin{aligned}
s_{2^k} &= a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{\geq 2a_4} + \underbrace{(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}_{\geq 4a_8} + \ldots + \underbrace{(a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k})}_{\geq 2^{k-1} a_{2^k}} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}\right)
\end{aligned}
$$

Analog erhält man

$$
\begin{aligned}
s_{2^k} &= a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{\leq 2a_2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{\leq 4a_4} + \ldots + \underbrace{(a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k - 1})}_{\leq 2^{k-1} a_{2^{k-1}}} + a_{2^k} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}\right)
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$
\frac{1}{2} t_k \leq s_{2^k} \leq t_k \quad \text{mit} \quad t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell a_{2^\ell}
$$

Gemeinsam mit dem obigen Satz folgt dann sofort allgemein:

Satz 10.17 (Verdichtungskriterium)**.** *Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die (verdichtete) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.*

Für das hier betrachtete Beispiel mit

$$
a_n = \frac{1}{n}
$$

sind die obigen Voraussetzungen erfüllt und wir erhalten

$$
t_k = \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell a_{2^\ell} = \sum_{\ell=0}^{k} 2^\ell \frac{1}{2^\ell} = k + 1
$$

Das ist natürlich eine unbeschränkte Folge, daher ist auch die harmonische Reihe unbeschränkt.

Das Cauchy-Kriterium für Reihen

Nach dem Satz 10.13 gilt: Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq n_0$ gilt:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Wegen $|s_n - s_m| = |s_m - s_n|$ dürfen wir zusätzlich annehmen, dass $m > n$ gilt, also $m = n+p$ mit $p \in \mathbb{N}$. Dann nimmt das Cauchy-Kriterium folgende Form an: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Absolut konvergente Reihen

Definition 10.8. *Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ heißt absolut konvergent $\Leftrightarrow$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Satz 10.18. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Beweis. Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist, gilt das Cauchy-Kriterium für diese Reihe: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

Wegen der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|$$

folgt dann sofort das Cauchy-Kriterium für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, also ist sie konvergent. Die Abschätzung folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

durch Grenzübergang. $\square$

Es gibt allerdings auch konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind.

Beispiel

Man betrachte die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Man nennt eine derartige Reihe eine alternierende Reihe. Die allgemeine Form einer alternierenden Reihe lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

mit $a_n \geq 0$.

Wir versuchen, das Cauchy-Kriterium nachzuweisen. Es gilt:

$$|(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + \dots + (-1)^{n+p-1}a_{n+p}| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1}a_{n+p}|$$

Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend. Daher folgt

$$a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1}a_{n+p} = \underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \dots \geq 0$$

und

$$a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1}a_{n+p} = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} + \dots \leq a_{n+1}.$$

Damit erhalten wir

$$|(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + \dots + (-1)^{n+p-1}a_{n+p}| \leq a_{n+1}.$$

Es gilt natürlich hier $a_n = \frac{1}{n} \to 0$. Also ist das Cauchy-Kriterium erfüllt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konvergiert also. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe und ist unbeschränkt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ist also nicht absolut konvergent.

Die obige Argumentation führt sofort auf folgendes allgemeine Ergebnis.

Satz 10.19 (Leibniz)**.** *Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.*

Wurzel- und Quotientenkriterium

Satz 10.20 (Wurzelkriterium)**.** *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei*

$$q = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann gilt:

1. *Ist $q < 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

2. *Ist $q > 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

Beweis. Sei $q < 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $q + \varepsilon < 1$. Zu diesem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q + \varepsilon < 1,$$

also

$$|a_n| < \tilde{q}^n \quad \text{mit} \quad \tilde{q} = q + \varepsilon < 1.$$

Daher gilt

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \tilde{q}^k = \tilde{q}^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{q}^k \leq \tilde{q}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{q}^k = \frac{\tilde{q}^{n+1}}{1 - \tilde{q}}$$

Damit folgt sofort das Cauchy-Kriterium für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Sei $q > 1$. Dann gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit

$$|a_{n_k}| \geq 1.$$

Also ist (a_n) keine Nullfolge. □

Satz 10.21 (Quotientenkriterium). *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und seien*

$$\overline{q} = \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{und} \quad \underline{q} = \liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Dann gilt:

1. *Ist $\overline{q} < 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

2. *Ist $\underline{q} > 1$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

Beweis. Sei $\overline{q} < 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\overline{q} + \varepsilon < 1$. Zu diesem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \overline{q} + \varepsilon < 1,$$

also

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot \tilde{q} \quad \text{mit} \quad \tilde{q} = \overline{q} + \varepsilon < 1,$$

und somit

$$|a_n| \leq |a_{n_0}| \cdot \tilde{q}^{n-n_0}$$

Daher gilt

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{n_0}| \cdot \tilde{q}^{k-n_0} = \frac{|a_{n_0}|}{\tilde{q}^{n_0}} \tilde{q}^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{q}^k \leq \frac{|a_{n_0}|}{\tilde{q}^{n_0}} \tilde{q}^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{q}^k = \frac{|a_{n_0}|}{\tilde{q}^{n_0}} \frac{\tilde{q}^{n+1}}{1 - \tilde{q}}$$

Damit folgt sofort das Cauchy-Kriterium für $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ist $\underline{q} > 1$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 = \underline{q} - \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \underline{q} - 1.$$

Also

$$|a_n| \geq |a_{n_0}|.$$

Daher ist (a_n) keine Nullfolge. $\square$

Beispiele

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

  Quotientenkriterium:

  $$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \to 0.$$

  Also ist die Reihe für alle x konvergent.

- $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

  Quotientenkriterium:

  $$\frac{(-1)^{k+1} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = -\frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} \to 0.$$

  Also ist die Reihe für alle x konvergent.

- $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

  Quotientenkriterium:

  $$\frac{(-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}} = -\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \to 0.$$

  Also ist die Reihe für alle x konvergent.

- $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

  Quotientenkriterium:

  $$\frac{(-1)^{k+1}\dfrac{x^{k+2}}{k+2}}{(-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}} = -x\,\frac{k+1}{k+2} \to -x.$$

  Also

  $$\lim_{k\to\infty}\left|-x\,\frac{k+1}{k+2}\right| = |x|.$$

  Die Reihe ist für $|x| < 1$ konvergent, für $|x| > 1$ divergent. Für $x = 1$ ist die Reihe ebenfalls konvergent, für $x = -1$ divergent.

Rechenregeln für Reihen

Aus den analogen Aussagen für Folgen folgt sofort:

Satz 10.22. *Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
3. $\lim_{n\to\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *mit* $q_n = (\sum_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} b_i)$.

Definition 10.9. *Sei $k \mapsto n_k$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Satz 10.23. *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann ist jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Seien

$$s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m \quad \text{und} \quad s'_m = a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_m}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_{k_0+1}| + |a_{k_0+2}| + \dots + |a_{k_0+p}| < \varepsilon.$$

Zu diesem $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt es einen Index $k_0' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\{1, 2, \dots, k_0\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_{k_0'}\}.$$

Natürlich muss gelten $k_0' \geq k_0$. Daher gilt für $m \geq k_0'$: Die Zahlen a_1, a_2, …, a_{k_0} treten sowohl in s_m also auch in s_m' auf. Die Differenz $s_m - s_m'$ ist also von der Form

$$\delta_{k_0+1}\, a_{k_0+1} + \delta_{k_0+2}\, a_{k_0+2} + \ldots + \delta_{k_0+p}\, a_{k_0+p} \quad \text{mit} \quad \delta_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Daher gilt

$$|s_m' - s_m| \leq |a_{k_0+1}| + |a_{k_0+2}| + \ldots + |a_{k_0+p}| < \varepsilon.$$

D.h. $s_m' - s_m \to 0$ und

$$s_m' = (s_m' - s_m) + s_m \to 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Die absolute Konvergenz folgt wegen

$$|a_{n_1}| + |a_{n_2}| + \ldots + |a_{n_m}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

□

WARNUNG: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe. Dann gibt es für jede Zahl $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = s.$$

(Riemannscher Umordnungssatz)

Produktreihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen in $\mathbb{R}$. Aus allen Produkten $a_i \cdot b_j$ kann man so genannte Produktreihen $p_0 + p_1 + \ldots$ bilden, wobei jedes Produkt $a_i \cdot b_j$ genau einmal als Glied auftreten muss.

Satz 10.24. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Dann ist jede Produktreihe $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ absolut konvergent und es gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ eine (spezielle) Produktreihe. Dann gilt

$$|p_0| + |p_1| + \ldots + |p_n| \leq (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m|) \cdot (|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_m|)$$

für hinreichend großes m. Daher folgt

$$|p_0| + |p_1| + \ldots + |p_n| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| \cdot \sum_{k=0}^{m} |b_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty.$$

Also ist diese Produktreihe absolut konvergent. Jede andere Produktreihe ist eine Umordnung und daher ebenfalls absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Die Folge (q_n) mit $q_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ ist eine Teilfolge einer Produktreihe mit Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Definition 10.10. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i} = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j$$

das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Satz 10.25. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Dann ist das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist eine Teilfolge einer Produktreihe. □

Beispiel

Wir betrachten die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$. Beide Reihen sind absolut konvergent. Für den Grenzwert des Cauchy-Produkts erhält man:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k-i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k\end{aligned}$$

Also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}.$$

10.4 Stetigkeit und Grenzwert von Funktionen

Definition 10.11. *1. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt in einem Punkt $x \in X$ stetig $\Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to x$ gilt: $f(x_n) \to f(x)$.*

2. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt stetig (in X), wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Also ist eine Funktion genau dann stetig, wenn

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)}$$

Aus den entsprechenden Aussagen für Folgen erhält man sofort:

1. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ ist in einem Punkt $x \in X$ stetig $\Leftrightarrow$ Jede ihrer Komponentenfunktionen f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ ist stetig in x.
2. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ ist stetig.
3. Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c\,x$ ist stetig.
4. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x \cdot y$ ist stetig.
5. Die Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ ist stetig.
6. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist stetig.
7. Sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ ist stetig.
8. Sei $a > 0$. Die Logarithmusfunktion $f\colon (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log_a x$ ist stetig.
9. Die Potenzfunktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^r$ ist stetig auf

$$X = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } r \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{für } r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ (0, \infty) & \text{für } r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

10. Seien $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in $X \subset \mathbb{R}^n$ und $g\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}^p$ in $f(X) \subset Y$ stetig. Dann ist $g \circ f$ auf X stetig.

    Beweis.

    $$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \Rightarrow (g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

    □

11. Damit folgt sofort für stetige Funktion f, g und $c \in \mathbb{R}$, dass auch $f+g$, $c \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $|f|$, $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ auf den jeweiligen Definitionsbereichen stetig sind.

    Beweis. Zu den letzten beiden Fällen beachte:

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) \quad \text{und} \quad \min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

□

Definition 10.12 (Einige topologische Begriffe)**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.*

1. *Ein Punkt $x \in D$ heißt ein innerer Punkt von D $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x) \subset D$ mit $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y-x\| < \varepsilon\}$.*
2. *Die Menge aller inneren Punkte von D heißt das Innere von D und wird mit D° bezeichnet.*
3. *Die Menge D heißt offen, wenn $D^\circ = D$.*
4. *Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt einer Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge (x_n) in D mit $x_n \neq x$, sodass $x_n \to x$.*
5. *Der Abschluss von D ist die Menge aller Punkte von D und aller Häufungspunkte von D und wird mit $\overline{D}$ bezeichnet.*
6. *Die Menge D heißt abgeschlossen, wenn $\overline{D} = D$.*
7. *Die Menge $\partial D = \overline{D} \setminus D^\circ$ heißt der Rand der Menge D.*
8. *Die Menge D heißt beschränkt $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Konstante C mit $\|x\| \leq C$ für alle $x \in D$.*

Definition 10.13. *Sei $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von X. Dann heißt $y \in \mathbb{R}^m$ Grenzwert der Funktion f im Punkt x_0, falls für alle Folgen (x_n) in X mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to y$.*

- Schreibweise:

$$\boxed{y = \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

- Man beachte, dass der Grenzwert auch in einem Punkt Sinn macht, der zwar Häufungspunkt von X aber nicht notwendigerweise in X liegen muss.
- Die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen führen sofort auf die entsprechenden Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen.

- Mit diesem Begriff lässt sich die Stetigkeit einer Funktion f in einem Häufungspunkt $x_0 \in X$ auch folgendermaßen formulieren:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ist $x_0 \in X$ kein Häufungspunkt, so heißt x_0 ein isolierter Punkt. Wir werden nur Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ auf Stetigkeit überprüfen, deren Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}^n$ keine isolierten Punkte enthält.

- Für Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ lassen sich analog einseitige Grenzwerte definieren. Schreibweise für den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{und} \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

- Es lässt sich leicht zeigen, dass $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in X$ stetig ist, falls

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

Satz 10.26. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig auf X. Dann ist $f(X)$ abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $f(X)$ mit $y_n \to y \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in X mit $f(x_n) = y_n$. Da X beschränkt ist, ist die Folge (x_n) beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Der Grenzwert x dieser Folge muss in X liegen, da X abgeschlossen ist. Wegen der Stetigkeit gilt $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt: $y = f(x)$, also ist $f(X)$ abgeschlossen.

Angenommen, $f(X)$ ist unbeschränkt. Dann existiert eine Folge (y_n) in $f(X)$, die keinen Häufungspunkt besitzt. Genau wie oben lässt sich aber eine konvergente Teilfolge finden. Widerspruch. □

Satz 10.27. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und sei $f\colon X \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ stetig auf X. Dann nimmt f auf X in jeweils mindestens einem Punkt das globale Maximum bzw. das globale Minimum an.*

Beweis. $f(X)$ ist beschränkt. Daher gilt: $\sup f(X) \in \mathbb{R}$ und es gibt eine Folge (y_n) in $f(X)$ mit $y_n \to \sup f(X)$. Da $f(X)$ abgeschlossen ist, folgt $\sup f(X) \in f(X)$. Also gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = \sup f(X) \geq f(y)$ für alle $y \in X$.

Die Existenz eines globalen Minimums folgt analog. □

10.4.1 Lösung einer Gleichung der Form $f(x) = y$

Satz 10.28. *Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$ stetig und streng monoton wachsend mit $c = f(a)$ und $d = f(b)$. Dann besitzt f eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$, die stetig und streng monoton wachsend ist.*

Beweis. Sei $y \in [c, d]$. Dann gilt: $f(a) \leq y \leq f(b)$. Die Existenz von $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$ folgt mit Bisektion (siehe Logarithmusfunktion). Die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie. Also gibt es eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c, d] \to [a, b]$. Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Sei $y_n \to y$, zu zeigen: $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y) = x$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|f^{-1}(y_n) - x| < \varepsilon,$$

d.h.:

$$x - \varepsilon < f^{-1}(y_n) < x + \varepsilon.$$

Angenommen, x ist ein innerer Punkt von $[a, b]$ mit $x - \varepsilon, x + \varepsilon \in [a, b]$. Dann sind die obigen Ungleichungen äquivalent zu

$$f(x - \varepsilon) < y_n < f(x + \varepsilon)$$

also

$$f(x - \varepsilon) - y < y_n - y < f(x + \varepsilon) - y,$$

also

$$y_n - y < \underbrace{f(x + \varepsilon) - f(x)}_{>0} \quad \text{und} \quad -(y_n - y) < \underbrace{f(x) - f(x - \varepsilon)}_{>0}.$$

Es genügt also, dass

$$|y_n - y| < \min(f(x + \varepsilon) - f(x), f(x) - f(x - \varepsilon)) = \varepsilon'$$

Das lässt sich für hinreichend großes n garantieren.

Der Beweis lässt sich leicht für Randpunkte x erweitern. $\square$

Es gilt also unter den Voraussetzungen des letzten Satzes: Die Gleichung

$$f(x) = y$$

besitzt für alle $y \in [c, d] = [\inf f([a, b]), \sup f([a, b])]$ genau eine Lösung $x \in [a, b]$. Die Existenz (nicht aber die Eindeutigkeit) einer Lösung $x \in [a, b]$ gilt auch ohne die Voraussetzung der strengen Monotonie:

Satz 10.29 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien $c = \inf f([a, b])$ und $d = \sup f([a, b])$. Dann gibt es für jedes $y \in [c, d]$ ein $x \in [a, b]$ mit*

$$f(x) = y.$$

Also $f([a, b]) = [c, d]$.

Beweis. Bisektion. $\square$

10.4.2 Lösung einer Gleichung der Form $x = g(x)$

Eine Gleichung dieser Form nennt man Fixpunktgleichung.

Satz 10.30 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$g([a,b]) \subset [a,b]$ und*
2. *g ist auf $[a,b]$ kontraktiv, d.h.: Es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \le q < 1$ sodass*
$$|g(y) - g(x)| \le q\,|y - x| \quad \text{für alle } x, y \in [a,b].$$

Dann gilt: Für jeden Startwert $x_0 \in [a,b]$ konvergiert die Folge (x_n), gegeben durch die Iterationsvorschrift
$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \text{für } n \ge 0,$$
und der Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ ist die einzige Lösung der Gleichung
$$x = g(x)$$
in $[a,b]$.

Beweis. Wir zeigen, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist:
$$\begin{aligned}|x_n - x_{n+p}| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \ldots + (x_{n+p-1} - x_{n+p})| \\ &\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p-1} - x_{n+p}|\end{aligned}$$
Es gilt
$$|x_m - x_{m+1}| = |g(x_{m-1}) - g(x_m)| \le q\,|x_{m-1} - x_m|.$$
Durch wiederholtes Anwenden folgt
$$|x_m - x_{m+1}| \le q^m\,|x_0 - x_1|$$
Daher erhalten wir
$$\begin{aligned}|x_n - x_{n+p}| &\le q^n\,|x_0 - x_1| + q^{n+1}\,|x_0 - x_1| + \ldots + q^{n+p-1}\,|x_0 - x_1| \\ &= |x_0 - x_1| q^n (1 + q + q^2 + \ldots + q^{p-1}) \le \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1|\end{aligned}$$
Daraus folgt sofort, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Die Funktion g ist stetig: Falls $y_n \to y$, dann gilt
$$|g(y_n) - g(y)| \le q|y_n - y| \longrightarrow 0, \text{ also } g(y_n) \longrightarrow g(y).$$
Somit folgt
$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x^*).$$
Für eine weitere Lösung $x^{**} \ne x^*$ folgt:
$$|x^{**} - x^*| = |g(x^{**}) - g(x^*)| \le q\,|x^{**} - x^*| < |x^{**} - x^*|$$
Widerspruch. □

Wie man sofort sieht, gilt allgemeiner:

Satz 10.31 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei $g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$g(X) \subset X$ und*
2. *g ist auf X kontraktiv, d.h.: Es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \le q < 1$ sodass*

$$\|g(y) - g(x)\| \le q\,\|y - x\| \quad \textit{für alle } x, y \in X.$$

Dann gilt: Für jeden Startwert $x_0 \in X$ konvergiert die Folge (x_n), gegeben durch die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \textit{für } n \ge 0,$$

und der Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ ist die einzige Lösung der Gleichung

$$x = g(x)$$

in X.

10.5 Differenzierbarkeit und Mittelwertsätze

- Die Ableitung einer reellen Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ wurde als Grenzwert eines Differenzenquotienten eingeführt, also im Sinne der Definition 10.13:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  mit $X \setminus \{x_0\}$ als Definitionsbereich von g.

- Die bisherigen Lücken im Nachweis der Rechenregeln lassen sich leicht mit Hilfe der entsprechenden Rechenregeln des Grenzwertes schließen.

- Bei der Berechnung der Ableitung von e^x wurde die Ungleichung

$$e^x \ge 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

  ohne Beweis vorausgesetzt. Wir schließen nun diese Lücke: Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend (siehe Übung). Für den Grenzwert e gilt daher:

$$e \ge \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

  Damit folgt aus der Monotonie der Exponentialfunktionen:

$$e^{\frac{1}{n}} \ge 1 + \frac{1}{n}$$

und somit für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$e^{\frac{m}{n}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \geq 1 + \frac{m}{n},$$

Analog zeigt man, dass die Folge $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wächst. Für den Grenzwert erhält man:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{n-1}{n} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n-1}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \to \frac{1}{e} = e^{-1}$$

Daraus lässt sich wie vorhin schließen:

$$e^{-\frac{m}{n}} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \geq 1 - \frac{m}{n},$$

Also gilt

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}.$$

Wegen der Stetigkeit der beteiligten Funktionen folgt durch Grenzübergang die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$.

Im Beweis des Satzes von Taylor wurde folgende Aussage verwendet.

Satz 10.32 (Satz von Rolle)**.** *Sei $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, auf (a, b) differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Nach Satz 10.27 existiert ein globales Minimum und ein globales Maximum von f in $[a, b]$. Wenn sowohl das globale Minimum als auch das globale Maximum in a oder b angenommen werden, ist die Funktion konstant und die Aussage ist trivialerweise richtig. Wenn eines der beiden Extrema im Inneren des Intervall liegt, folgt die Behauptung aus Satz 2.6. □

Wichtige Folgerungen sind die so genannten Mittelwertsätze:

Satz 10.33. *Seien $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, auf (a, b) differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

Beweis. Wegen Satz 10.32 gilt: $g(b) \neq g(a)$. Man betrachte die Funktion $h\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Offensichtlich gilt: $h(a) = h(b)$. Aus Satz 10.32 folgt: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi),$$

woraus man sofort die Behauptung erhält. □

Für $g(x) = x$ erhält man im Speziellen: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)}$$

d.h.:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a),$$

bzw.: Es gibt ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(a + \theta(b - a))(b - a)}$$

Für den mehrdimensionalen Fall gilt folgende Variante des Mittelwertsatzes:

Satz 10.34. *Sei $f\colon X \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, (total) differenzierbar in X und seien $x_0, h \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + th \in X$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\theta \in (0, 1)$ mit*

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h}$$

Beweis. Folgt sofort aus dem obigen Satz bei Anwendung auf $\varphi(t) = f(x_0 + th)$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = f'(x_0 + \theta h)h.$$

□

10.6 Die Regel von de l'Hospital

Für Folgen haben wir bisher nur Grenzwerte in $\mathbb{R}^m$ betrachtet und für Funktionen nur Grenzwerte in $\mathbb{R}^m$ an Stellen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ betrachtet. Wir erweitern nun den Grenzwertbegriff für Folgen und Funktionen:

Definition 10.14. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $+\infty$ $\Leftrightarrow$ Zu jedem $C \in \mathbb{R}$ mit $C > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:*

  $$a_n > C.$$

  Schreibweisen: $a_n \to +\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $-\infty$ $\Leftrightarrow$ Zu jedem $C \in \mathbb{R}$ mit $C > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:*

  $$a_n < -C.$$

  Schreibweisen: $a_n \to -\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Definition 10.15. *1. Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von X.*

- *f divergiert gegen $+\infty$ für $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ Für alle Folgen (x_n) in X mit $x_n \neq x$ und $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to +\infty$.*
  Schreibweise: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$
- *f divergiert gegen $-\infty$ für $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ Für alle Folgen (x_n) in X mit $x_n \neq x$ und $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to -\infty$.*
  Schreibweise: $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

2. Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem nach oben unbeschränkten Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}$.

- *f divergiert gegen $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ für $x \to +\infty$ $\Leftrightarrow$ Für alle Folgen (x_n) in X mit $x_n \to +\infty$ gilt: $f(x_n) \to y$.*
  Schreibweise: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = y$

3. Sei $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem nach unten unbeschränkten Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}$.

- *f divergiert gegen $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ für $x \to -\infty$ $\Leftrightarrow$ Für alle Folgen (x_n) in X mit $x_n \to -\infty$ gilt: $f(x_n) \to y$.*
  Schreibweise: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = y$

Die Rechenregeln für Grenzwerte lassen sich entsprechend erweitern, wenn man folgende Vereinbarungen trifft:

$$c + (+\infty) = (+\infty) + c = +\infty \quad c + (-\infty) = (-\infty) + c = -\infty \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$c \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{für } c > 0 \\ -\infty & \text{für } c < 0 \end{cases}, \quad c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{für } c > 0 \\ +\infty & \text{für } c < 0 \end{cases}$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{c}{+\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$$

$$c^{+\infty} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq c < 1 \\ +\infty & \text{für } c > 1 \end{cases} \qquad c^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{für } 0 \leq c < 1 \\ 0 & \text{für } c > 1 \end{cases}$$

$$(+\infty)^c = \begin{cases} +\infty & \text{für } c > 0 \\ 0 & \text{für } c < 0 \end{cases}$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

Keine sinnvolle Vereinbarungen lassen sich für folgende Ausdrücke treffen:

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty), \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0$$

Man spricht von unbestimmten Ausdrücken. In diesen Fällen kann die Regel von de l'Hospital helfen. Zunächst eine einfache Variante:

Satz 10.35. *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei $x_0 \in (a, b)$. Es gelte*

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Falls der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und es gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz folgt: Zu jedem $x \in (a, b)$ mit $x \neq x_0$ gibt es ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{mit} \quad \xi = x_0 + \theta\,(x - x_0).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung, weil $\xi \to x_0$ für $x \to x_0$. □

Wesentlich allgemeiner gilt:

Satz 10.36 (Regel von de l'Hospital)**.** *Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es gelte entweder*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{10.1}$$

oder

$$\lim_{x\to a} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}. \tag{10.2}$$

Falls der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und es gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Der Beweis ist schwieriger als vorhin, weil $f(a)$ und $g(a)$ nicht verfügbar sind. Als Ersatz wählen wir $f(u)$ und $g(u)$ mit $u \in (a, b)$ und $u \neq x$.

Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ folgt: $g(x) \neq 0$, falls x nahe genug bei a ist, $g(u) \neq g(x)$ und

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} \cdot \frac{g(x)-g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)} \\
&= \underbrace{\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)}}_{T_1} \left(1 - \underbrace{\frac{g(u)}{g(x)}}_{T_2}\right) + \underbrace{\frac{f(u)}{g(x)}}_{T_3}
\end{aligned}$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt: Es gibt ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{mit} \quad \xi = u + \theta\,(u-x). \tag{10.3}$$

Daher konvergiert der Term T_1 gegen $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ für $x \to a$ und $u \to a$.

Falls (10.1) gilt, konvergieren die Terme T_2 und T_3 gegen 0 für fixes x und $u \to a$.

Falls (10.2) gilt, konvergieren die Terme T_2 und T_3 gegen 0 für fixes u und $x \to a$. □

Die analogen Aussagen gelten für $x \to b$.

Beispiele:

1.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \left(= \frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

ABER:
$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

3.
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right] (= (+\infty) - (+\infty)) &= \lim_{x\to 0+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \left(= \frac{0}{0}\right) \\
= \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \left(= \frac{0}{0}\right) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0
\end{aligned}$$

4.
$$\lim_{x\to 0+} x \ln x \,(= 0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(= \frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$$

5.

$$\lim_{x\to 0+} x^x \left(= 0^0\right) = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

6.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(= 1^{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

weil

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) (= \infty\cdot 0) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

7.

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} \left(= (+\infty)^0\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

weil

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \left(= \frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Kapitel 11

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Motivation: Wir haben bereits gesehen, dass man (beliebig oft) differenzierbare Funktionen f durch so genannte Taylor-Polynome T_n (vom Grad n) approximieren kann. Die Folge der Taylor-Polynome $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein wichtiges Beispiel einer so genannten Funktionenfolge, also einer Folge, deren Glieder nicht wie bisher Zahlen (aus $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^m$) sondern Funktionen sind.

Die spezielle Funktionenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nannten wir die Taylor-Reihe von f. Die Glieder dieser speziellen Funktionenfolge haben die Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k \tag{11.1}$$

mit Koeffizienten $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Funktionenfolgen, deren Glieder von der allgemeinen Form (11.1) sind (mit einer beliebigen Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) nennt man Potenzreihen. Man verwendet für Potenzreihen die Bezeichnung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k.$$

Die gleiche Bezeichnung verwendet man auch für die Grenzfunktion, also jene Funktion, deren Wert an einer Stelle x durch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$$

gegeben ist, sofern der Grenzwert existiert.

Eine erste wichtige Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt:

$$\boxed{\text{Für welche } x \text{ existieren diese Grenzwerte und wie sieht die Grenzfunktion aus?}}$$

Dazu haben wir bereits einige Ergebnisse abgeleitet, z.B.: Die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ stimmt mit der Exponentialfunktion überein, also:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{11.2}$$

Zur Herleitung dieses Ergebnisses war der Satz von Taylor (die Taylor-Formel) sehr hilfreich. Diese Erkenntnis und die Tatsache, dass (nach dem Quotientenkriterium) die Reihe auch für alle Argumente aus $\mathbb{C}$ konvergiert, motiviert die folgende Definition der Funktion auf der Definitionsmenge $\mathbb{C}$:

Definition 11.1. *Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann ist der Wert der Exponentialfunktion an der Stelle z durch*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definiert.

Diese Definition stimmt offensichtlich in $\mathbb{R}$ wegen (11.2) mit der ursprünglichen Definition (über Potenzen) überein. Zur Erinnerung: Wir hatten den Ausdruck e^x für $x \in \mathbb{R}$ über den Weg von Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ definiert. Die Erweiterung auf Argumente aus $\mathbb{C}$ erfolgte mit Hilfe von Winkelfunktionen, die wir geometrisch einsichtig (aber noch nicht analytisch) eingeführt haben. Inwieweit diese Definition in $\mathbb{C}$ mit der obigen Definition, die ohne Winkelfunktionen auskommt, übereinstimmt, bleibt noch offen.

Wir konnten in all diesen Fällen von immer größer werdenden Definitionsbereichen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ z.B. das folgende wichtige Additionstheorem zeigen:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}.$$

Verwendet man stattdessen die obige Definition, dann folgt dieses Additionstheorem sofort aus den Überlegungen auf Seite 164 für beliebige komplexe Argumente (ohne Verwendung von geometrisch einsichtig bewiesenen Additionstheoremen über Winkelfunktionen).

Die nächste wichtige Frage an Funktionenfolgen:

$$\boxed{\text{Welche Eigenschaften der einzelnen Folgenglieder erbt die Grenzfunktion?}}$$

Bei Taylor-Reihen sind die Folgenglieder Polynome, sind also stetig, differenzierbar und integrierbar. Bleibt diese Eigenschaften auch für die Grenzfunktion erhalten? Wenn das der Fall ist: Kann man die Ableitung oder das Integral durch gliedweise Differentiation oder Integration bestimmen? Auch dazu ein Beispiel: Leitet man das n-te Taylor-Polynom der Exponentialfunktion e^x nach x ab, so folgt (unter Verwendung der üblichen Rechenregeln):

$$(T_n(x))' = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = T_{n-1}(x).$$

Die Grenzfunktion der Funktionenfolge $(T_{n-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist natürlich wieder e^x. Würden wir bereits wissen, dass die Grenzfunktion der Folge der abgeleiteten Glieder einer Funktionenfolge gleich der Ableitung der Grenzfunktion ist, dann wäre damit die Formel

$$(e^x)' = e^x$$

für die obige Definition der Exponentialfunktion (auch für komplexe Argumente) bewiesen. Wir konnten diese Regel schon bisher allerdings mit wesentlich größerem Aufwand in $\mathbb{R}$ nachweisen und den Nachweis auf $\mathbb{C}$ erweitern, wieder unter Verwendung von geometrisch einsichtigen Eigenschaften von Winkelfunktionen.

Um die hier aufgezeigten Fragen im Zusammenhang mit Potenzreihen zu untersuchen, ist es zweckmäßig, diese Fragen zunächst für allgemeine Funktionenfolgen zu klären und anschließend diese Erkenntnisse auf Potenzreihen anzuwenden.

11.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Wir beginnen mit dem Begriff der punktweisen Konvergenz von Funktionenfolgen von Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich X und gemeinsamem Bildbereich Y, wobei X und Y (Teilmengen von) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ sind.

Definition 11.2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n\colon X \longrightarrow Y$ und $f\colon X \longrightarrow Y$ Funktionen. Dann heißt f die Grenzfunktion der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow$ Für alle $x \in X$ gilt*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Sprechweise: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f.
Schreibweise: $f_n \xrightarrow{pw} f$.

Oder etwas formaler

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Zu jedem x und zu jedem ε muss also ein geeignetes n_0 gefunden werden, das natürlich von x und ε abhängig sein darf. Eine stärkere Forderung wäre es, wenn wir zu jedem ε die Existenz eines n_0 fordern, das nicht vom x abhängig ist, wenn also für die Grenzfunktion gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in X : \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{11.3}$$

Diese stärke Forderung lässt sich auch folgendermaßen äquivalent formulieren:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon\ \sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} < \varepsilon \tag{11.4}$$

Beweis. Aus (11.4) folgt natürlich sofort (11.3). Aus (11.3) für ein ε' folgt zunächst nur

$$\sup\{\|f_n(x) - f(x)\| : x \in X\} \leq \varepsilon'$$

Mit der Wahl $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ folgt dann (11.4). □

Wir fordern hier also, dass die Folge gewissermaßen gleichmäßig bezüglich x gegen f konvergiert. Das motiviert die folgende Definition:

Definition 11.3. *1. Sei $g\colon X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Wir definieren die so genannte Supremumsnorm $\|g\|_\infty \in \mathbb{R}$ von g durch*

$$\|g\|_\infty = \sup\{\|g(x)\|\colon x \in X\}.$$

2. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

Schreibweise $f_n \stackrel{glm}{\longrightarrow} f$.

Anmerkungen und Beispiele:

- Wenn es eine Grenzfunktion bzgl. der punktweisen Konvergenz gibt, dann ist sie eindeutig, da Grenzwerte von konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}_n$ eindeutig sind.

- Natürlich folgt sofort:
$$f_n \stackrel{glm}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \stackrel{pw}{\longrightarrow} f.$$
Daher ist die Grenzfunktion bezüglich der punktweisen Konvergenz der einzige Kandidat, der als Grenzfunktion bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz in Betracht zu ziehen ist.

- Offensichtlich gilt:
$$f_n \stackrel{glm}{\longrightarrow} f \iff \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$
Also lässt sich die Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Untersuchung der reellen Folge $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ zurückführen.

- Beispiel: Wie man sofort sieht, konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $f_n(x) = x^n$ auf $X = [0, \frac{1}{2}]$ punktweise gegen die Nullfunktion, also gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$. Sie konvergiert sogar gleichmäßig gegen f:
$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{|x^n - 0| : x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\} = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$$

- Aus der punktweisen Konvergenz folgt im Allgemeinen nicht die gleichmäßige Konvergenz.

- Beispiel: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf $X = [0, 1]$ gegen die Funktion f mit
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Sie konvergiert allerdings nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f: Es gilt:

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & \text{für } x < 1, \\ 0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Also:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|x^n| : x \in [0,1)\} = 1 \not\longrightarrow 0$$

Die eben eingeführte Supremumsnorm $\|f\|_\infty$ erfüllt so wie der Betrag in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und die (Euklidische) Norm von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ die drei zu Beginn des Kapitels über Grenzwerte formulierten Eigenschaften: Definitheit, Homogenität und Dreiecksungleichung, wie man leicht sieht. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formal völlig gleich definiert wie ursprünglich die Konvergenz von Zahlenfolgen. Der einzige Unterschied ist die jeweilige Norm, die in der Definition verwendet wird.

Auf diese Weise erhalten wir sofort die folgende Aussage analog zum entsprechenden Satz 10.13 für Zahlenfolgen:

Satz 11.1 (Cauchy-Kriterium). *Eine Folge von Funktionen $f_n\colon X \longrightarrow Y$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn das Cauchy-Kriterium erfüllt ist, d.h.: wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ gilt:*

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

oder, kurz

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0\ \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Beweis. $\Longrightarrow$: eine komplette Kopie des Beweises in Satz 10.13.
$\Longleftarrow$: Die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ folgt für alle $x \in X$ aus Satz 10.13, weil

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Es bleibt zu zeigen, dass (f_n) sogar gleichmäßig gegen f konvergiert: Sei $\varepsilon' > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq n_0$ gilt:

$$\forall x \in X : \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon'.$$

Damit folgt

$$\forall x \in X : \|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon'.$$

Mit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ folgt die Behauptung. $\square$

Daraus erhält man das für uns wichtigste Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen:

Satz 11.2 (Kriterium von Weierstraß). *Seien $f_n\colon X \longrightarrow Y$ die Glieder einer Funktionenfolge, $c_n \in \mathbb{R}$ die Glieder einer Zahlenfolge mit*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\colon \|f_n(x)\| \leq c_n.$$

Dann gilt: Falls $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig.

Beweis. Wir weisen das Cauchy-Kriterium für die Funktionenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

nach: Für $n, p \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Dreiecksungleichung für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned}\|s_{n+p}(x) - s_n(x)\| &= \|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\| \\ &\leq \|f_{n+1}(x)\| + \|f_{n+2}(x)\| + \ldots + \|f_{n+p}(x)\| \\ &\leq c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p},\end{aligned}$$

also

$$\|s_{n+p} - s_n\|_\infty \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}$$

Aus dem Cauchy-Kriterium für Zahlenreihen folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, p \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon.$$

Damit folgt sofort das Cauchy-Kriterium für die Funktionenreihe. □

Im Beweis des Satzes kam folgende Abschätzung vor:

$$\|f_{n+1}(x)\| + \|f_{n+2}(x)\| + \ldots + \|f_{n+p}(x)\| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}.$$

Daraus folgt unter den Bedingungen des Satzes, dass sogar die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_n(x)\|$ für alle $x \in X$ konvergiert. Sie ist also in jedem Punkt x absolut konvergent.

Man sieht sofort, dass mit den Bezeichnungen des Beweises sogar die folgende Abschätzung gilt:

$$\|f_{n+1}\|_\infty + \|f_{n+2}\|_\infty + \ldots + \|f_{n+p}\|_\infty \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}.$$

Daraus folgt unter den Bedingungen des Satzes, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ konvergiert.

11.2 Vertauschung von Grenzübergängen

Vertauschbarkeit von zwei Grenzwerten

Gegeben seien eine Funktionenfolge von Funktionen $f_n\colon X \longrightarrow Y$ und ein Häufungspunkt x_0 von X. Wir untersuchen nun, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen die Grenzwerte $n \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow x_0$ vertauscht werden dürfen, also ob gilt:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass man vorsichtig sein muss:

Warnbeispiel

Für $f_n(x) = x^n$ auf dem Definitionsbereich $X = [0,1]$ gilt:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = 0}$$

Beweis. Es gilt für die Grenzfunktion:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}.$$

Für jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $x_m \in X = [0,1]$, $x_m \neq 1$, $x_m \longrightarrow 1$ gilt: $f(x_m) = 0$, also trivialerweise: $f(x_m) \longrightarrow 0$. □

Aber:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} f_n(x)\right) = 1}$$

Beweis. Folgt sofort aus der Stetigkeit von Potenzfunktionen:

$$\lim_{x\to 1} f_n(x) = f_n(1) = 1$$

□

Der folgende Satz liefert hinreichend Bedingungen für die Vertauschbarkeit der Grenzwerte:

Satz 11.3. *Gegeben seien eine Funktionenfolge von Funktionen $f_n\colon X \longrightarrow Y$ und ein Häufungspunkt x_0 von X. Wir setzen voraus, dass (f_n) gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $y_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existiert. Dann gilt: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und*

$$\lim_{x\to x_0}\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{=f(x)} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)}_{=y_n}.$$

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Folge in X mit $x_k \neq x_0$ und $x_k \longrightarrow x_0$. Wir zeigen, dass die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ das Cauchy-Kriterium erfüllt. Es gilt für $k, l, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|f(x_k) - f(x_l)\| &= \|f(x_k) - f_n(x_k) + f_n(x_k) - f_n(x_l) + f_n(x_l) - f(x_l)\| \\
&\leq \|f(x_k) - f_n(x_k)\| + \|f_n(x_k) - f_n(x_l)\| + \|f_n(x_l) - f(x_l)\| \\
&\leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n(x_k) - f_n(x_l)\| + \|f_n - f\|_\infty
\end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon' > 0$ gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon' \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Für dieses n_0 wissen wir laut Voraussetzung, dass $\lim_{x\to x_0} f_{n_0}(x)$ und damit auch der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f_{n_0}(x_k)$ existiert. Daher erfüllt die Folge $(f_{n_0}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ das Cauchy-Kriterium: Zu jedem $\varepsilon'' > 0$ gibt es ein k_0, sodass für alle $k, l \geq k_0$ gilt:

$$\|f_{n_0}(x_k) - f_{n_0}(x_l)\| < \varepsilon''.$$

Also folgt für alle $k, l \geq k_0$ insgesamt:

$$\|f(x_k) - f(x_l)\| < 2\varepsilon' + \varepsilon''.$$

Mit der Wahl $\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{3}$ folgt, dass $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und damit einen Grenzwert y besitzt.

Für diesen Grenzwert gilt für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|y_n - y\| &= \|y_n - f_n(x_k) + f_n(x_k) - f(x_k) + f(x_k) - y\| \\
&\leq \|y_n - f_n(x_k)\| + \|f_n(x_k) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - y\| \\
&\leq \|y_n - f_n(x_k)\| + \|f_n - f\|_\infty + \|f(x_k) - y\| \\
&\leq \|y_n - f_n(x_k)\| + \varepsilon' + \|f(x_k) - y\|
\end{aligned}$$

Für $k \longrightarrow \infty$ folgt wegen $f_n(x_k) \longrightarrow y_n$ und $f(x_k) \longrightarrow y$:

$$\|y_n - y\| \leq \varepsilon' < \varepsilon.$$

Also konvergiert y_n gegen y.

Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also konvergiert und der Grenzwert eindeutig ist, muss $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ für jede Wahl von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert besitzen. Also ist y der Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0 und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

□

Eine einfache aber wichtige Folgerung aus diesem Satz:

Satz 11.4. *Gegeben sei eine Funktionenfolge von stetigen Funktionen $f_n\colon X \longrightarrow Y$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Dann ist f ebenfalls stetig.*

Beweis. Sei x_0 ein Häufungspunkt von X. Wegen der Stetigkeit von f_n gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0).$$

Also sind alle Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt. Daher folgt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

□

Man beachte, dass beim Warnbeispiel die Funktionenfolge zwar punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion konvergiert, die Voraussetzungen für die Vertauschbarkeit sind nicht erfüllt, und wir haben tatsächlich gesehen, dass in diesem Beispiel die Grenzwerte nicht vertauscht werden dürfen.

Vertauschbarkeit von Grenzwert und Differentiation

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge von differenzierbaren Funktionen reicht nicht aus, damit die Grenzfunktion differenzierbar ist.

Warnbeispiel

Für $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ auf dem Definitionsbereich $X = [-1, 1]$ gilt: f_n konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = |x|$.

Beweis.

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} - |x| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} + |x|} \leq \frac{1}{n}$$

Also

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

□

Die Folge der Funktionen f_n' konvergiert immerhin punktweise:

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}} \longrightarrow \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion ist im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar, obwohl die Grenzfunktion der Ableitungen im Punkt 0 einen Grenzwert besitzt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 0.$$

Wir brauchen stärkere Voraussetzungen, um die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion zu garantieren:

Satz 11.5. *Gegeben sei eine Funktionenfolge von differenzierbaren Funktionen* $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $f_n \stackrel{glm}{\longrightarrow} f$ *und* $f_n' \stackrel{glm}{\longrightarrow} g$. *Dann ist die Grenzfunktion* f *differenzierbar und es gilt* $f' = g$. *Also gilt für alle* $x \in [a,b]$:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Beweis. Sei $x_0 \in [a,b]$. Wir definieren eine Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Definitionsbereich $X = [a,b] \setminus \{x_0\}$:

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}.$$

Die Funktionen g_n konvergieren gleichmäßig: Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \neq x_0$ ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} g_n(x) - g_m(x) &= \frac{[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]}{x - x_0} \\ &= f_n'(x_0 + \theta\,(x - x_0)) - f_m'(x_0 + \theta\,(x - x_0)) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \|f_n' - f_m'\|_\infty$$

und daher

$$\|g_n - g_m\|_\infty \leq \|f_n' - f_m'\|_\infty \longrightarrow 0$$

für $n, m \longrightarrow \infty$. Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gleichmäßig mit

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} g_n(x)$ existieren wegen der Differenzierbarkeit von f_n an der Stelle x_0 und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} g_n(x) = f_n'(x_0)$$

Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt also alle Voraussetzungen des Satzes 11.3. Daher folgt:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} g_n(x)\right).$$

Also

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = g(x_0).$$

□

Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration

Die punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen reicht nicht aus, um Grenzwert und Integral vertauschen zu dürfen.

Warnbeispiel

Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) = n\,x\,e^{-\frac{nx^2}{2}}$ auf dem Definitionsbereich $X = [0,1]$. Offensichtlich konvergiert f_n punktweise gegen die Nullfunktion, also

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = \int_0^1 0\ dx = 0.$$

Andererseits gilt:

$$\int_0^1 f_n(x)\ dx = \int_0^1 n\,x\,e^{-\frac{nx^2}{2}}\ dx = \int_0^{\frac{n}{2}} e^{-u} du = 1 - e^{-\frac{n}{2}}.$$

Also

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = 1.$$

Wir brauchen wieder stärkere Bedingungen:

Satz 11.6. *Gegeben sei eine Funktionenfolge von R-integrierbaren Funktionen* $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $f_n \overset{glm}{\longrightarrow} f$. *Dann ist die Grenzfunktion* f *R-integrierbar und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx.$$

Beweis. Wir führen den Beweis der Einfachheit halber nur für den Fall einer stetigen Funktionenfolge. Dann ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig, daher R-integrierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\ dx \right| \\ &\le (b-a)\ \sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in [a,b]\} = (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration

Es gilt:

Satz 11.7. *Die Funktion $f\colon [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und besitze eine partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$, die ebenfalls stetig auf $[a,b]\times[c,d]$ ist. Dann ist die Funktion $F\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx$$

differenzierbar und es gilt

$$\frac{dF}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx.$$

Also

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\ dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ dx.$$

Beweis. Zu zeigen ist: $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0$ für das Restglied

$$r(h) = F(y_0+h) - F(y_0) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\ dx\cdot h$$

Es gilt:

$$\frac{r(h)}{h} = \int_a^b \left[\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right]\ dx.$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt: Es gibt ein $\theta\in(0,1)$ mit

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right| &= \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta\, h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right|\\ &\le \sup_{\substack{x_1,x_2\in[a,b]\\ y_1,y_2\in[c,d]}}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1)\right| : \left\|\begin{pmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{pmatrix}\right\| \le h\right\}\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\frac{|r(h)|}{|h|} \le (b-a)\sup_{\substack{x_1,x_2\in[a,b]\\ y_1,y_2\in[c,d]}}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1)\right| : \left\|\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\right\| \le h\right\}.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r(h)|}{|h|} = 0,$$

da die Funktion $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ stetig und daher sogar gleichmäßig stetig ist. Siehe die folgende Erklärung. □

Das letzte Argument im Beweis erfordert eine genauere Betrachtung:
Für eine stetige Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ gilt offensichtlich für alle $x\in X$:

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\substack{y\in X\\ \|y-x\|\le h}}\|f(y)-f(x)\| = 0$$

Beweis. Angenommen, die obige Bedingung gilt nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (y_n) mit $y_n \longrightarrow x$ und $\|f(y_n) - f(x)\| \geq \varepsilon$ im Widerspruch zur Stetigkeit. □

Eine stärkere Bedingung ist Inhalt der folgenden Definition:

Definition 11.4. *Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt gleichmäßig stetig $\Longleftrightarrow$*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\substack{x,y\in X \\ \|y-x\|\leq h}} \|f(y) - f(x)\| = 0$$

Es gilt nun der folgende wichtige Satz:

Satz 11.8. *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Funktion mit einem abgeschlossenen und beschränkten Definitionsbereich X. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und Folgen (x_n) und (y_n) mit $y_n - x_n \longrightarrow 0$, aber $\|f(y_n) - f(x_n)\| \geq \varepsilon$. Da X abgeschlossen und beschränkt ist, existieren konvergente Teilfolgen (x_{n_k}) und (y_{n_k}). Für diese Teilfolgen gilt $y_{n_k} - x_{n_k} \longrightarrow 0$. Also sind die Grenzwerte gleich: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$. Dann folgt aber wegen der Stetigkeit:

$$f(y_{n_k}) - f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x) - f(x) = 0$$

Widerspruch. □

Wendet man diesen Satz auf die stetige Funktion $\frac{\partial f}{\partial y}$ an, dann folgt: Sie ist auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $[a, b] \times [c, d]$ sogar gleichmäßig stetig und man erhält:

$$\sup_{\substack{x_1,x_2\in[a,b] \\ y_1,y_2\in[c,d]}} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) \right| : \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\| \leq h \right\} \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \longrightarrow 0.$$

11.3 Potenzreihen

Definition 11.5. *1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktionenreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \textit{mit} \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Mittelpunkt x_0 und Koeffizienten a_n.

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{mit} \quad z \in \mathbb{C}$$

eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z_0 und Koeffizienten a_n.

- Taylor-Reihen sind Potenzreihen.

Wir wenden nun das Wurzelkriterium an, um jene Argumente $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ zu finden, für die die Potenzreihe konvergiert und somit die Grenzfunktion, die im Zusammenhang mit Potenzreihen auch Summenfunktion genannt wird, definiert ist:
Sei
$$q = \limsup \sqrt[n]{|a_n\,(x-x_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0|.$$
Nach dem Wurzelkriterium gilt:

1. Für $q < 1$ ist die Reihe absolut konvergent. Beachte:
$$q = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| < 1 \Longleftrightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$
2. Für $q > 1$ ist die Reihe divergent. Beachte:
$$q = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| > 1 \Longleftrightarrow |x-x_0| > \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Wir führen den so genannten Konvergenzradius ρ der Potenzreihe ein:
$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,\infty) \cup \{+\infty\}$$
und haben damit den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen:

Satz 11.9. *1. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| < \rho$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ absolut konvergent.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-x_0| > \rho$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ divergent.

Die Menge $K = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < \rho\} = (x_0-\rho, x_0+\rho)$ heißt das Konvergenzintervall der Potenzreihe.

2. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \rho$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ absolut konvergent.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > \rho$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ divergent.

Die Menge $K = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < \rho\}$ heißt der Konvergenzkreis der Potenzreihe.

3. Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ in $[0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ existiert, gilt:
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Beweis. Zu 2.: Völlig analog zu 1.

Zu 3: Aus dem Quotientenkriterium folgt mit

$$\overline{q} = \underline{q} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x-x_0|$$

Für $\overline{q} = \underline{q} < 1$ ist die Potenzreihe absolut konvergent. Beachte:

$$\overline{q} = \underline{q} < 1 \iff |x-x_0| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Für $\overline{q} = \underline{q} > 1$ ist die Potenzreihe divergent.

$$\overline{q} = \underline{q} > 1 \iff |x-x_0| > \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Durch Vergleich folgt die Behauptung. □

Beispiele

- Wir betrachten die Potenzreihe:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n.$$
Konvergenzradius:
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$
Also konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Summenfunktion wird als Exponentialfunktion e^z definiert:
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n.$$
Sie stimmt für $x \in \mathbb{R}$ mit der (über Potenzen definierten) Funktion e^x überein.

- Motiviert durch die Taylor-Reihe der (geometrisch definierten) Winkelfunktionen definieren wir:
$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}$$
Konvergenzradien:
$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(2k+1)!}}{\frac{1}{(2k+3)!}} = \lim_{k\to\infty} (2k+2)(2k+3) = +\infty$$
und
$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(2k)!}}{\frac{1}{(2k+2)!}} = \lim_{k\to\infty} (2k+1)(2k+2) = +\infty$$

Also sind die Funktionen sin und cos für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\, z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!}\, z^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} = \cos z + i \cdot \sin z
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \cdot \sin(-z) = \cos z - i \cdot \sin z$$

und somit

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Aus dem (mit Hilfe des Cauchy-Produktes bewiesenen) Additionstheorem der Exponentialfunktion

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

folgen dann entsprechende Additionstheoreme für sin und cos, z.B.:

$$
\begin{aligned}
&\cos(z_1+z_2) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\cos z_1 + i \sin z_1) \cdot (\cos z_2 + i \sin z_2) + (\cos z_1 - i \sin z_1) \cdot (\cos z_2 - i \sin z_2)\right) \\
&= \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2.
\end{aligned}
$$

Für $z_1 = z = -z_2$ folgt im Speziellen:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt wegen der reellen Koeffizienten: $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$ und wegen der obigen Identität sogar $\sin x, \cos x \in [-1, +1]$.

- Die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Konvergenzradius:

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Im Konvergenzintervall $K = (-1, 1)$ kennen wir bereits die Summenfunktion:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Aus den Erkenntnissen der vorigen Abschnitte über Eigenschaften der Grenzfunktion einer Funktionenfolge erhalten wir folgende spezielle Aussagen für Potenzreihen:

Satz 11.10. *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$ *und Summenfunktion* $f\colon K \to \mathbb{R}$*, also*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n.$$

Dann gilt:

1. f *ist stetig auf* K*.*
2. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(x-x_0)^{n-1}$ *besitzt den Konvergenzradius* ρ*,* f *ist auf* K *differenzierbar und es gilt:*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(x-x_0)^{n-1}.$$
3. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *besitzt den Konvergenzradius* ρ *und ist auf* K *eine Stammfunktion von* f*:*
$$\int f(x)\;dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C.$$

Beweis. Zu 1: Sei $r < \rho$. Für $|x-x_0| \le r$ folgt:

$$|a_k(x-x_0)^k| \le |a_k| r^k$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ ist nach dem Wurzelkriterium konvergent:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r\,\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{\rho} < 1.$$

Daher konvergiert nach dem Kriterium von Weierstraß die Potenzreihe auf $\overline{K}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}\colon |x-x_0| \le r\}$ gleichmäßig. Die Partialsummen sind Polynome, also stetig. Daher ist auch die Summenfunktion stetig.

Zu 2: Für den Konvergenzradius ρ' der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(x-x_0)^{n-1}$ folgt:

$$\rho' = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

Also konvergiert die ursprüngliche Potenzreihe, d.h.: die Folge der Partialsummen, und die Folge der ersten Ableitungen der Partialsummen auf $\overline{K}_r(x_0)$ mit $r < \rho$ gleichmäßig. Die

Behauptung folgt aus Satz 11.5:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k\right)' = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\left((x-x_0)^k\right)' \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k a_k(x-x_0)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

Zu 3: Für den Konvergenzradius P der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ folgt:

$$P = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\cdot\limsup\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

Sei $x \in \overline{K}_r(x_0)$. Aus Satz 11.6 folgt, dass die Summenfunktion auf $\overline{K}_r(x_0)$ R-integrierbar ist und

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\sum_{k=0}^{n} a_k(t-x_0)^k\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^k\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Anmerkungen:

- Die Aussagen des letzten Satzes gelten auch für Potenzreihen in $\mathbb{C}$. Der Beweis verläuft völlig analog.
- Durch wiederholte Anwendung folgt: Die Potenzreihe ist auf K beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)\,a_n\,(x-x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\,a_n\,(x-x_0)^{n-k} \end{aligned}$$

  Damit folgt:

$$f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k \quad \text{also} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

  Das bedeutet: Eine Potenzreihe ist die Taylor-Reihe ihrer Summenfunktion.

Beispiele:

- Für alle $x \in (-1,1)$ gilt (geometrische Reihe):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^n.$$

Durch Integration erhält man für alle $x \in (-1,1)$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

- Für alle $x \in (-1,1)$ gilt (geometrische Reihe):

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n}.$$

Durch Integration erhält man für alle $x \in (-1,1)$:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

- Für die Funktion

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

gilt

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)(1+x)^{\alpha - n}.$$

Daher erhält man folgende Taylor-Reihe (binomische Reihe) um den Punkt $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{mit} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ gilt (binomischer Lehrsatz):

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Wir diskutieren nun den Fall: $\alpha \notin \mathbb{N}_0$.

Konvergenzradius dieser Potenzreihe:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1.$$

Konvergenzintervall $K = (-1, 1)$. Wir bezeichnen die Summenfunktion mit $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Wir zeigen nun für alle $x \in K$: $f(x) = g(x)$. Dazu berechnen wir zuerst die Ableitungen von f und g:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad \text{also} \quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

Die gleiche Differentialgleichung gilt auch für $g(x)$:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1}$$

Also:

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1}(1+x) \\
&= \alpha \left[\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^n \right] \\
&= \alpha \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^n \right] \\
&= \alpha \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right]}_{\binom{\alpha}{n}} x^n \right] = \alpha g(x)
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{(1+x)g'(x)}{(1+x)f'(x)} = \frac{\alpha g(x)}{\alpha f(x)} = \frac{g(x)}{f(x)},$$

also

$$g'(x)f(x) = g(x)f'(x)$$

und daher

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)' = 0.$$

Somit gilt:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{f(0)} = 1.$$

- Für $|x| < 1$ erhalten wir aus der binomischen Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}+1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^6 + \ldots$$

Durch Integration folgt:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

- Ableitung von Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned}
(\sin z)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(2k+1)\, z^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} = \cos z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cos z)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,(2k)\, z^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\, z^{2k-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} = -\sin z
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun Randpunkte des Konvergenzintervalls reeller Potenzreihen.

Satz 11.11 (Abelscher Grenzwertsatz)**.** *Gegeben sei eine reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit Konvergenzradius $\rho \in (0,+\infty)$. Falls die Potenzreihe auch im Punkt $x = x_0+\rho$ konvergiert, dann gilt für die Summenfunktion:*

$$\lim_{x \to x_0+\rho-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n.$$

Die Summenfunktion ist also im Punkt ρ (linksseitig-)stetig. Eine entsprechende Aussage gilt auch im Punkt $x = x_0 - \rho$.

Beweis. Zu zeigen ($y = x - x_0$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad y \longrightarrow \rho - \,.$$

Wir heben einen Faktor $1 - \frac{y}{\rho}$ heraus. Für $0 \leq y < \rho$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

Da die beteiligten Reihen absolut konvergent sind, gilt (Cauchy-Produkt):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\rho}\right)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k y^k \left(\frac{y}{\rho}\right)^{n-k}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k\right] \left(\frac{y}{\rho}\right)^n
\end{aligned}$$

Man beachte, dass

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k$$

laut Voraussetzung gegen den Grenzwert

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$$

konvergiert. Es folgt:

$$\begin{aligned}
s - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n &= \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\rho}\right)^n s - \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(\frac{y}{\rho}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_n) \left(\frac{y}{\rho}\right)^n
\end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|s - s_n| < \varepsilon'$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\left| s - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right| &\leq \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \sum_{n=0}^{n_0 - 1} |s - s_n| \left(\frac{y}{\rho}\right)^n + \varepsilon' \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{y}{\rho}\right)^n \\
&\leq \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) \sum_{n=0}^{n_0 - 1} |s - s_n| + \varepsilon'
\end{aligned}$$

Sei nun $(y_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige Folge mit $y_m < \rho$ und $y_m \longrightarrow \rho$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon'' > 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq m_0$ gilt: $|\rho - y_m| < \varepsilon''$ und es folgt:

$$\left| s - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y_m)^n \right| \leq \frac{\varepsilon''}{\rho} \sum_{n=0}^{n_0-1} |s - s_n| + \varepsilon'$$

Dann folgt die Behauptung für

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon'' = \frac{\rho}{2\sum_{n=0}^{n_0-1} |s - s_n|}.$$

□

Beispiele

- Wir wissen bereits, dass für alle $x \in (-1, 1)$ gilt:

  $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots.$$

  Die Reihe konvergiert auch im Punkt $x = 1$, also folgt nach dem Abelschen Grenzwertsatz:

  $$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

- Analog folgt aus

  $$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots.$$

  für $x \in (-1, 1)$ und der Konvergenz der Reihe für $x = 1$:

  $$\lim_{x \to 1-} \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

  Diese Identität eignet sich als eine mögliche Definition von π:

  $$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

-

  Satz 11.12 (Abelscher Produktsatz). *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent. Dann gilt:*

  $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis. Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sind für $|x| < 1$ absolut konvergent: Wäre der Konvergenzradius kleiner als 1, würden die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergieren.

Daher gilt für $|x| < 1$: Das Cauchy-Produkt ist ebenfalls absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Der Rest folgt direkt aus dem Abelschen Grenzwertsatz. □

Kapitel 12

Fourier-Reihen

12.1 Trigonometrische Polynome und Reihen

Wir betrachten eine Polynomfunktion in $\mathbb{C}$:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, z^k \quad \text{mit} \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Diese Funktion lässt sich auf dem komplexen Einheitskreis $K = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ mit Hilfe der Polarform

$$z = e^{ix} \quad \text{mit} \quad x \in [-\pi, \pi]$$

auch folgendermaßen darstellen:

$$p(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} c_k \, (\cos kx + i \, \sin kx) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(c_k \, \cos kx + i \, c_k \, \sin kx\big)$$

Lässt man auch negative Potenzen zu, so erhält man Funktionen der Form

$$t(x) = \boxed{\sum_{k=-n}^{n} c_k \, e^{ikx}} = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, (\cos kx + i \, \sin kx) \tag{12.1}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \big((c_k + c_{-k}) \, \cos kx + i(c_k - c_{-k}) \sin kx\big)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \, \cos kx + b_k \sin kx) = \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \, \cos kx + b_k \sin kx)} \tag{12.2}$$

mit

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{und} \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

bzw.

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad \text{und} \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \tag{12.3}$$

mit der Zusatzvereinbarung $b_0 = 0$.

Definition 12.1. *Die Funktionen der Form (12.1) bzw. (12.2) heißen trigonometrische Polynome (vom Grad n). Die Menge aller solchen trigonometrischen Polynome vom Grad n bezeichnen wir mit T_n. Die entsprechenden Reihen (als Folgen von Partialsummen)*

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}} \qquad \textit{bzw.} \qquad \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

heißen trigonometrischen Reihen.

- Trigonometrische Polynome sind natürlich 2π-periodische Funktionen, trigonometrische Reihen sind Funktionenreihen von 2π-periodischen Funktionen (und in diesem Sinn ebenfalls 2π-periodisch).
- Die Koffizienten a_n und b_n sind genau dann reell, wenn $c_{-n} = \overline{c_n}$. In diesem Fall lässt sich ein trigonometrisches Polynom bzw. eine trigonometrische Reihe als eine reelle Funktion bzw. als eine Reihe reeller Funktionen auffassen. Die Form (12.2) kommt ohne die Verwendung komplexer Koeffizienten aus, während die Koeffizienten c_n der Form (12.1) nach wie vor komplexe Zahlen sind.

Bei einem (normalen) Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

lassen sich die Koeffizienten folgendermaßen darstellen:

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!},$$

da das Polynom trivialerweise mit seiner Taylor-Reihe übereinstimmt.

Wir versuchen nun die Koeffizienten eines trigonometrisches Polynoms der Form (12.1)

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}$$

ohne die Verwendung von Ableitungen darzustellen. Dazu ist die folgende Eigenschaft der Funktionen e^{ikx} von großer Bedeutung:

Satz 12.1. *Für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell x}\overline{e^{ikx}}\; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell x} e^{-ikx}\; dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)x}\; dx = \begin{cases} 2\pi & \textit{falls } k = \ell, \\ 0 & \textit{falls } k \neq \ell. \end{cases}$$

Beweis. Für $k = \ell$: trivial. Sei $k \neq \ell$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)x}\,dx &= \frac{1}{i(\ell-k)}\,e^{i(\ell-k)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(\ell-k)}\left(e^{i(\ell-k)\pi} - e^{-i(\ell-k)\pi}\right)\\ &= \frac{2}{(\ell-k)}\sin\big((\ell-k)\pi\big) = 0.\end{aligned}$$

□

Multipliziert man $t(x)$ mit $\overline{e^{ikx}} = e^{-ikx}$ und integriert anschließend über $[-\pi, \pi]$, so erhält man

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\,\overline{e^{ikx}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell\,e^{i\ell x}\,\overline{e^{ikx}}\,dx = \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\ell x}\,\overline{e^{ikx}}\,dx = 2\pi\,c_k,$$

also

$$\boxed{t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\,e^{-ikx}\,dx}$$

Für die Koeffizienten a_k und b_k der Form (12.2) des selben trigonometrischen Polynoms erhält man daraus:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\left(e^{-ikx} + e^{ikx}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\cos kx\,dx$$

und

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\sin kx\,dx$$

Also

$$\boxed{t(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx)}$$

mit

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\,\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(x)\,\sin kx\,dx}$$

Die spezielle Form der Koeffizienten der Taylor-Polynome war der Ausgangspunkt zur Einführung der Taylor-Reihe (als Folge von Taylor-Polynomen)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f (im Punkt $x_0 = 0$).

Ähnlich gehen wir für trigonometrische Polynome vor, allerdings benötigen wir hier keine Ableitungen:

Definition 12.2. *Sei $f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine R-integrierbare Funktion. Dann heißt die trigonometrische Reihe (als Folge von trigonometrischen Polynomen) der Form (12.1)*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} \quad \mathit{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\; dx \tag{12.4}$$

bzw. der Form (12.2)

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, \cos n\, x + b_n\, \sin n\, x)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos nx\; dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin nx\; dx. \tag{12.5}$$

die Fourier-Reihe von f.

- Ist f eine gerade reelle Funktion, dann gilt $b_n = 0$. Die Fourier-Reihe ist dann eine reine Kosinusreihe.
- Ist f eine ungerade reelle Funktion, dann gilt $a_n = 0$. Die Fourier-Reihe ist dann eine reine Sinusreihe.

Beispiele:

- $f(x) = x$:

  $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\; dx = 0$$

  da der Integrand eine ungerade Funktion ist.

  $$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\; dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\, \frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\; dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-x\, \frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right] = (-1)^{n-1}\, \frac{2}{n} \end{aligned}$$

  Also lautet die Fourier-Reihe:

  $$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sin nx = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\right)$$

  Man beachte: Für $x = \pi$ und $x = -\pi$ erhalten wir als Grenzwert der Fourier-Reihe den Wert 0, während $f(\pi) = \pi$ und $f(-\pi) = -\pi$.

- $f(x) = e^{\alpha x}$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}e^{-inx}\;dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha-in)x}\;dx = \frac{1}{2\pi}\;\frac{1}{\alpha-in}e^{(\alpha-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha-in}\left[e^{(\alpha-in)\pi} - e^{-(\alpha-in)\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha-in}\left[e^{\alpha\pi}(-1)^n - e^{-\alpha\pi}(-1)^n\right] \\
&= (-1)^n\,\frac{\sinh\alpha\pi}{\pi}\;\frac{1}{\alpha-in} = (-1)^n\,\frac{\sinh\alpha\pi}{\pi}\;\frac{\alpha+in}{\alpha^2+n^2}
\end{aligned}$$

Daher folgt

$$a_n = c_n + c_{-n} = (-1)^n\,\frac{\sinh\alpha\pi}{\pi}\;\left[\frac{\alpha+in}{\alpha^2+n^2} + \frac{\alpha-in}{\alpha^2+n^2}\right] = (-1)^n\,\frac{\sinh\alpha\pi}{\pi}\;\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}$$

und

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i(-1)^n\,\frac{\sinh\alpha\pi}{\pi}\;\left[\frac{\alpha+in}{\alpha^2+n^2} - \frac{\alpha-in}{\alpha^2+n^2}\right] = -(-1)^n\,\frac{\sinh\alpha\pi}{\pi}\;\frac{2n}{\alpha^2+n^2}$$

Also lautet die Fourier-Reihe:

$$\frac{\sinh\alpha\pi}{\pi}\;\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2}{\alpha^2+n^2}\;(\alpha\,\cos nx - n\,\sin nx)\right]$$

- Sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

Die Funktion ist ungerade, daher $a_n = 0$ und

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\;dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\;dx$$

Also

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\;dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also lautet die Fourier-Reihe:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

12.2 L^2-Approximation

Für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ wurde das innere Produkt folgendermaßen eingeführt:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

Auf ähnliche Weise kann man zwei R-integrierbaren Funktionen $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zuordnen:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\; dx.$$

Diese Zahl nennt man das L^2-Produkt von f and g.

Für Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^n$ bzw. für Funktionen $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ lauten die entsprechenden Definitionen von inneren Produkten:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overline{y_i} \quad \text{bzw.} \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\; dx.$$

Wichtige Eigenschaften:

1. $\langle f, f \rangle \geq 0$
2. $\langle a\, f_1 + b\, f_2, g \rangle = a\, \langle f_1, g \rangle + b\, \langle f_2, g \rangle$
3. $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$

Für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ wurde eine Norm folgendermaßen eingeführt:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Diese Norm lässt sich auch mit Hilfe des inneren Produktes ausdrücken:

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Analog lässt sich mit Hilfe des inneren Produktes eine Norm (L^2-Norm) für Funktionen einführen, die auf einem Intervall $[a,b]$ R-integrierbar sind:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\; dx}$$

Aus den oben erwähnten einfachen Eigenschaften des inneren Produktes folgen folgende Eigenschaften für die Norm:

1. $\|f\|_2 \geq 0$
2. $\|a\, f\|_2 = |a|\, \|f\|_2$
3. $|\langle f, g\rangle|_2 \leq \|f\|_2\, \|g\|_2$
4. $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

Trigonometrische Polynome aus T_n sind Linearkombinationen von Funktionen aus der Menge

$$\{e^{ikx}\colon\, -n \leq k \leq n\} = \{e^{-inx}, \ldots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \ldots, e^{inx}\}. \tag{12.6}$$

Aus Satz 12.1 folgt sofort, dass für zwei verschiedene Funktionen f und g aus dieser Menge gilt:

$$\langle f, g\rangle = 0.$$

Das L^2-Produkt von zwei verschiedenen Funktionen aus der Menge (12.6) ist also 0. Wie bei Vektoren spricht man von orthogonalen Funktionen f und g , wenn $\langle f, g\rangle = 0$. Die obige Menge ist also eine Menge von orthogonalen Funktionen (Orthogonalsystem).

Die L^2-Norm dieser Funktionen lässt sich leicht berechnen. Man erhält sofort aus Satz 12.1:

$$\|f\|_2 = \sqrt{2\pi}.$$

Für eine Funktion f mit $\|f\|_2 > 0$ besitzt die Funktion

$$g = \frac{1}{\|f\|_2}\, f$$

die Norm 1:

$$\|g\|_2 = \left\| \frac{1}{\|f\|_2}\, f \right\|_2 = \frac{1}{\|f\|_2}\, \|f\|_2 = 1.$$

Also besitzen die Funktionen der Menge

$$\left\{ u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx}\colon\, -n \leq k \leq n \right\}$$

alle die Norm 1. Ein konstanter Faktor bewirkt keine Änderung der Orthogonalität, auch diese Funktionen sind orthogonal. In diesem Fall spricht man von einem Orthonormalsystem. Es gilt also:

$$\langle u_\ell, u_k\rangle = \delta_{\ell k} = \begin{cases} 1 & \text{für } \ell = k \\ 0 & \text{für } \ell \neq k \end{cases}$$

Jedes trigonometrische Polynom $t \in T_n$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} d_k\, u_k(x)$$

mit Koeffizienten $d_k = \sqrt{2\pi}\, c_k$ aus $\mathbb{C}$.

Mit dieser Notation gilt nun:

Satz 12.2. *Sei $f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine R-integrierbare Funktion. Die n-te Partialsumme s_n der Fourier-Reihe von f hat dann folgende spezielle Darstellung:*

$$\boxed{s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, u_k\rangle\, u_k(x)}$$

Beweis. Es gilt

$$\langle f, u_k\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt = \sqrt{2\pi}\, c_k \tag{12.7}$$

für die Fourier-Koeffizienten c_k, gegeben durch (12.4). Also

$$\langle f, u_k\rangle\, u_k(x) = \sqrt{2\pi}\, c_k\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikt} = c_k\, e^{ikt}.$$

□

Wir bestimmen nun jenes trigonometrisches Polynom $t^* \in T_n$, das den geringsten L^2-Abstand zu f besitzt, d.h.:

$$\|f - t^*\|_2 \le \|f - t\|_2 \quad \text{für alle } t \in T_n.$$

Für ein beliebiges trigonometrisches Polynom

$$t(x) = \sum_{k=-n}^{n} d_k\, u_k(x)$$

aus T_n folgt

$$\|f - t\|_2^2 = \langle f - t, f - t\rangle = \langle f, f\rangle - \langle f, t\rangle - \langle t, f\rangle + \langle t, t\rangle$$

Nun gilt:

$$\langle f, t\rangle = \left\langle f, \sum_{k=-n}^{n} d_k\, u_k \right\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{d_k}\, \langle f, u_k\rangle\,, \quad \langle t, f\rangle = \overline{\langle f, t\rangle} = \sum_{k=-n}^{n} d_k\, \overline{\langle f, u_k\rangle}$$

und

$$\langle t, t\rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} d_k\, u_k, \sum_{\ell=-n}^{n} d_\ell\, u_\ell \right\rangle = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} d_k\, \overline{d_\ell}\, \langle u_k, u_\ell\rangle = \sum_{k=-n}^{n} |d_k|^2 \tag{12.8}$$

Also

$$\begin{aligned}
\|f - t\|_2^2 &= \langle f, f\rangle + \sum_{k=-n}^{n} \left[-\overline{d_k}\, \langle f, u_k\rangle - d_k\, \overline{\langle f, u_k\rangle} + |d_k|^2\right] \\
&= \langle f, f\rangle - \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, u_k\rangle|^2 + \sum_{k=-n}^{n} \left[|\langle f, u_k\rangle|^2 - \overline{d_k}\, \langle f, u_k\rangle - d_k\, \overline{\langle f, u_k\rangle} + |d_k|^2\right] \\
&= \langle f, f\rangle - \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, u_k\rangle|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, u_k\rangle - d_k|^2
\end{aligned} \tag{12.9}$$

Man sieht unmittelbar, dass der Abstand genau dann am kleinsten ist, wenn gilt

$$d_k = \langle f, u_k \rangle \quad \text{für alle } k = -n, \dots, n.$$

Der minimale Abstand wird also für die Funktion $t^* \in T_n$, gegeben durch

$$t^*(x) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, u_k \rangle \, u_k(x) = s_n(x),$$

angenommen. Also ist t^* die n-te Partialsumme $s_n \in T_n$ der Fourier-Reihe von f. Damit haben wir den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen:

Satz 12.3. *Sei $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar. Dann gilt für die n-te Partialsumme s_n der Fourier-Reihe von f:*

1. *s_n ist die beste Approximation von f in T_n: $\|f - s_n\|_2 \le \|f - t\|_2$ für alle $t \in T_n$. s_n ist das einzige Element aus T_n mit dieser Eigenschaft.*
2. *$\|s_n\|_2^2 + \|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2$ (Besselsche Gleichung)*
3. *$\langle f - s_n, t \rangle = 0$ für alle $t \in T_n$.*
4. *$\|s_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, u_k \rangle|^2 \le \|f\|_2^2$ (Besselsche Ungleichung)*

Beweis. Aus (12.8) folgt mit $d_k = \langle f, u_k \rangle$:

$$\|s_n\|_2^2 = \langle s_n, s_n \rangle = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, u_k \rangle|^2.$$

Aus (12.9) folgt dann sofort der zweite Teil des Satzes.

Zum dritten Teil: Es genügt, die Aussage für $t = u_\ell$ mit $-n \le \ell \le n$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}\langle f - s_n, u_\ell \rangle &= \left\langle f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, u_k \rangle \, u_k, u_\ell \right\rangle = \langle f, u_\ell \rangle - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, u_k \rangle \, \langle u_k, u_\ell \rangle \\ &= \langle f, u_\ell \rangle - \langle f, u_\ell \rangle = 0.\end{aligned}$$

Die Besselsche Ungleichung folgt direkt aus der Besselschen Gleichung. □

Aus (12.7) folgt sofort:

$$\|s_n\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k, gegeben durch (12.4).

Völlig analoge Aussagen lassen sich aus den obigen Aussagen oder direkt auch für die Form (12.5) einer Fourier-Reihe ableiten: Die Menge der Funktionen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}$$

ist ein Orthonormalsystem bezüglich dem L^2-Produkt und es gilt zusätzlich die Darstellung

$$\|s_n\|_2^2 = \pi \left[\frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{n} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right]$$

mit den Fourier-Koeffizienten a_k, b_k, gegeben durch (12.5).

12.3 L^2-Konvergenz von Fourier-Reihen

Wir betrachten das Cauchy-Kriterium für eine trigonometrische Reihe

$$(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \, u_n(x).$$

Es gilt für alle $m \geq n \in \mathbb{N}$:

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \left\| \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} d_k \, u_k \right\|_2^2 = \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} |d_k|^2$$

Damit folgt sofort der erste Teil des folgenden Satzes:

Satz 12.4. *1. Eine trigonometrische Reihe*

$$(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \, u_n(x).$$

erfüllt genau dann das Cauchy-Kriterium, wenn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2 < \infty \tag{12.10}$$

2. Die Fourier-Reihe einer R-integrierbaren Funktion erfüllt das Cauchy-Kriterium.

Beweis. Der 2. Teil folgt sofort aus dem 1. Teil für $d_k = \langle f, u_k \rangle$ und der Besselschen Ungleichung:

$$\sum_{k=-n}^{n} |\langle f, u_k \rangle|^2 = \|s_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

□

Die Bedingung (12.10) lässt sich natürlich auch mit Hilfe der Koffizienten c_n oder a_n, b_n einer trigonometrischen Reihe formulieren:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \pi \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right] < \infty$$

Sei $R[-\pi, \pi]$ die Menge aller auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ R-integrierbaren Funktionen. Es lässt sich zeigen (ohne Beweis), dass es für trigonometrische Reihen, die das Cauchy-Kriterium erfüllen, eine Grenzfunktion s gibt, also

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_2 = 0.$$

Schreibweise: $s_n \xrightarrow{L^2} s$.

Allerdings muss s nicht notwendigerweise in $R[-\pi, \pi]$ liegen. Das erfordert eine Erweiterung des Integralbegriffs (von Riemann-Integrierbarkeit zu Lebesgue-Integrierbarkeit), um die L^2-Norm auch für solche Grenzfunktionen bzw. für den Fehler $s_n - s$ zur Verfügung zu haben. Die Menge aller möglichen Grenzfunktionen bezüglich der L^2-Norm von Cauchy-Folgen in $R[-\pi, \pi]$ bezeichnet man mit $L^2(-\pi, \pi)$. Sie umfasst alle R-integrierbare Funktionen:

$$R[-\pi, \pi] \subset L^2(-\pi, \pi).$$

Die Situation ist vergleichbar mit der Situation der Zahlenmengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$: Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ konvergieren, der Grenzwert liegt aber nicht notwendigerweise in $\mathbb{Q}$, jedenfalls aber in der größeren Menge $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ nennt man auch die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$. In gleicher Weise ist $L^2(-\pi, \pi)$ die Vervollständigung von $R[-\pi, \pi]$ (bezüglich der L^2-Norm).

Für Fourier-Reihen einer Funktion $f \in R[-\pi, \pi]$ kann man zeigen, dass f eine Grenzfunktion ist:

Satz 12.5. *Sei $f \in R[-\pi, \pi]$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f in der L^2-Norm gegen f.*

Wichtige Folgerungen:

Satz 12.6. *Für alle $f, g \in R[-\pi, \pi]$ gelten*

1. *die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung:*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, u_n\rangle \overline{\langle g, u_n\rangle}$$

2. *und die Parsevalsche Gleichung:*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, u_n\rangle|^2.$$

Beweis. Seien s_n und t_n die Partialsummmen der Fourier-Reihen von f und g. Also

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, u_k \rangle \, u_k \quad \text{und} \quad t_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle g, u_k \rangle \, u_k.$$

Wegen der Orthonormalität folgt sofort

$$\langle s_n, t_n \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, u_k \rangle \, \overline{\langle g, u_k \rangle}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} |\langle s_n, t_n \rangle - \langle f, g \rangle| &= |\langle s_n - f, t_n \rangle + \langle f, t_n - g \rangle| \le \|s_n - f\|_2 \|t_n\|_2 + \|f\|_2 \|t_n - g\|_2 \\ &\le \|s_n - f\|_2 \|g\|_2 + \|f\|_2 \|t_n - g\|_2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Parsevalsche Gleichung folgt aus der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung für $g = f$. □

Die Parsevalschen Gleichungen lassen sich natürlich auch mit Hilfe der Koffizienten c_n oder a_n, b_n der Fourier-Reihe von f und den entspechenden Koeffizienten γ_n oder α_n, β_n der Fourier-Reihe von g formulieren:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \overline{\gamma_n} = \pi \left[\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, \overline{\alpha_n} + b_n \, \overline{\beta_n}) \right], \\ \|f\|_2^2 &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \pi \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right]. \end{aligned}$$

Differentiation und Integration von Fourier-Reihen

Satz 12.7. *Seien $f, g \in R[-\pi, \pi]$ und sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Fourier-Reihe von f. Dann gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \langle s_n, g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Beweis. Es gilt:

$$|\langle s_n, g \rangle - \langle f, g \rangle| \le \|s_n - f\|_2 \|g\|_2 \longrightarrow 0.$$

□

Es darf also Integration und Summation vertauscht werden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ikx} \right] \overline{g(x)} \, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{g(x)} \, dx.$$

Zur Vertauschung von Differentiation und Summation gilt:

Satz 12.8. *Sei*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

die Fourier-Reihe der stetig differenzierbaren Funktion f mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann erhält man die Fourier-Reihe von f' durch termweises Differenzieren:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} in \, c_n \, e^{inx}.$$

Beweis. Für die Fourier-Koeffizienten c_n' von f' gilt:

$$c_n' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \, e^{-inx} \, dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, ine^{inx} \, dx = in \, c_n$$

□

Völlig analoge Aussagen lassen sich aus den obigen Aussagen oder direkt auch für die Form (12.5) einer Fourier-Reihe ableiten:

Sei

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

die Fourier-Reihe der stetig differenzierbaren Funktion $f \colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann erhält man die Fourier-Reihe von f' durch termweises Differenzieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx).$$

Kommentare zur punktweisen Konvergenz von Fourier-Reihen

Die Untersuchung der punktweisen Konvergenz von Fourier-Reihen ist wesentlich komplizierter. Ohne Beweis werden zwei typische Resultate erwähnt:

Satz 12.9. *Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in R[-\pi, \pi]$. Dann gilt:*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) \quad \textit{für alle } x \in [a, b] \setminus N$$

wobei N eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Zur Erinnerung: Eine Menge $N \subset \mathbb{R}$ heißt eine Lebesgue-Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ Intervalle I_n, $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Für die Formulierung des nächsten Satzes benötigen wir die folgenden Begriffe:

Definition 12.3. • *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt 2π-periodisch, falls*

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- *Eine Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig differenzierbar, falls es eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ gibt, sodass f auf jedem offenen Intervall (x_{k-1}, x_k) stetig differenzierbar ist und alle einseitigen Grenzwerte der Funktion f und ihrer stückweisen Ableitung in x_0, x_1, …, x_n existieren.*

Es gilt nun:

Satz 12.10. *Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ stückweise stetig differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen die Grenzfunktion s mit*

$$s(x) = \frac{1}{2}\left[\lim_{y\to x-} f(y) + \lim_{y\to x+} f(y)\right].$$

12.4 Anwendungen von Fourier-Reihen

Mit Hilfe von Fourier-Reihen lassen sich Differentialgleichungsprobleme lösen.

Beispiel: Ungedämpfte Schwingung mit periodischer Anregung

Wir suchen nach periodischen Lösungen der Differentialgleichung

$$mx''(t) + kx(t) = F(t)$$

mit einer periodischer Anregung $F(t)$ der Periode T. Durch eine einfache Substitution $\bar{t} = \frac{2\pi t}{T}$ wird die ursprüngliche Periodenlänge T bezüglich t auf den Wert 2π bezüglich der neuen Variablen $\bar{t}$ transformiert. Für die entsprechend transformierte Funktion

$$\bar{x}(\bar{t}) = x(t) = x\left(\frac{T}{2\pi}\bar{t}\right)$$

erhält man dann die transformierte Differentialgleichung:

$$\bar{x}(\bar{t})'' + \bar{\omega}_0^2\,\bar{x}(\bar{t}) = \bar{f}(\bar{t}) \quad \text{mit} \quad \bar{\omega}_0 = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

und der 2π-periodischen Funktion

$$\bar{f}(\bar{t}) = \frac{T^2}{4\pi^2 m} F\left(\frac{T}{2\pi}\bar{t}\right).$$

Zur Vereinfachung der Notation ersetzen wir in der weiteren Diskussion die Größen $\bar{t}$, $\bar{x}$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{f}$ durch t, x, ω_0, f. Wir suchen also nach einer 2π-periodischen Lösung von

$$x(t)'' + \omega_0^2\, x(t) = f(t),$$

wobei f eine 2π-periodische Funktion ist.

Die Funktion f lässt sich als Fourier-Reihe darstellen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Für die gesuchte Lösung $x(t)$ machen wir einen Ansatz mit Hilfe einer Fourier-Reihe:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}$$

mit noch unbekannten Koeffizienten d_n. Die Koeffizienten erhält man, wenn man diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt, die Rechenregeln für das Differenzieren von Fourier-Reihen berücksichtigt und termweise vergleicht:

$$(in)^2\, d_n + \omega_0^2\, d_n = c_n, \quad \text{also} \quad d_n = \frac{c_n}{\omega_0^2 - n^2}.$$

Wir erhalten somit die periodische Lösung in Form einer Fourier-Reihe, falls $\omega_0 \notin \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\omega_0^2 - n^2} e^{int} = \frac{c_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 - n^2} \left[c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}\right] \\ &= \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 - n^2} \left[a_n\, \cos nt + b_n\, \sin nt\right] \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\; dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\; dt.$$

Beispiel: Wärmeleitgleichung

Wir suchen nach einer Lösung $u(x,t)$ der Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad x \in (0,\pi),\; t > 0,$$

die die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad t > 0$$

und die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x)$$

erfüllt. Setzt man die Anfangsbedingung künstlich auf $[-\pi, \pi]$ durch

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x > 0 \\ -u_0(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

fort und sucht nach einer Lösung dieses Problems, das bezüglich x 2π-periodisch und ungerade ist, dann ist die Einschränkung dieser Lösung auf den ursprünglichen Bereich $[0, \pi]$ eine Lösung des ursprünglichen Problems.

Die (fortgesetzte) Funktion $u_0(x)$ lässt sich als reine Sinusreihe darstellen:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin nx \; dx.$$

Für die gesuchte Lösung $u(x,t)$ machen wir einen Ansatz als reine Sinusreihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \sin nx$$

mit noch unbekannten Koeffizienten $d_n(t)$. Die Koeffizienten erhält man, wenn man diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt, die Rechenregeln für das Differenzieren von Fourier-Reihen berücksichtigt und termweise vergleicht:

$$d_n(t)' = -an^2 \, d_n(t).$$

Die Anfangsbedingung liefert:

$$d_n(0) = b_n.$$

Also

$$d_n(t) = b_n \, e^{-an^2 t}.$$

Wir erhalten somit die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-an^2 t} \sin nx \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin nx \; dx.$$

Beispiel: Wärmeleitgleichung - Separationsansatz

Wir betrachten die Wärmeleitgleichung nochmals. Diesmal suchen wir zunächst nach speziellen Lösungen der Form (Separationsansatz):

$$u(x,t) = v(x) \, w(t).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

$$v(x) \, w'(t) = a \, v''(x) \, w(t),$$

also

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = a\,\frac{v''(x)}{v(x)},$$

falls $v(x) \neq 0$ und $w(t) \neq 0$. Es muss daher eine von x und t unabhängige Konstante λ geben, sodass

$$\frac{1}{a}\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

Wir betrachten zunächst die Folgerungen für $v(x)$. Offensichtlich muss also gelten:

$$v''(x) = -\lambda\, v(x). \tag{12.11}$$

Die obigen Randbedingung an $u(x,t)$ sind sicher erfüllt, falls $v(x)$ die folgenden Randbedingungen erfüllt:

$$v(0) = v(\pi) = 0 \tag{12.12}$$

Nach den Überlegungen aus Kapitel 4 erhalten wir als Lösungen der Differentialgleichung:

$$v(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

Aus der Randbedingung folgt die Zusatzbedingung:

$$C_1 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda}\,\pi = n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}.$$

D.h.:

$$\lambda = \lambda_n = n^2 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

Also sind die Funktionen

$$v_n(x) = \sin(nx) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

nicht-triviale Lösungen von (12.11), (12.12).

Zu jeder dieser Lösungen $v_n(x)$ lässt sich die dazugehörige Funktion $w_n(t)$ konstruieren. Es muss gelten:

$$w_n'(t) = -a\lambda_n\, w_n(t) = -an^2\, w_n(t).$$

Nach den Überlegungen aus Kapitel 4 erhalten wir als Lösungen der Differentialgleichung:

$$w_n(t) = b_n\, e^{-an^2 t}$$

Damit erhalten wir die folgenden Lösungen der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung:

$$u_n(x,t) = b_n\, e^{-an^2 t}\, \sin nx$$

Nach dem Superpositionsprinzip dürfen wir erwarten, dass Funktionen der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-an^2 t}\, \sin nx$$

die partielle Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllen. Es bleibt die Aufgabe, die Koeffizienten b_n so zu wählen, dass auch die Anfangsbedingung erfüllt sind. Das führt (formal) auf die Bedingung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = u_0(x).$$

Wir benötigen also eine Darstellung der Funktion $u_0(x)$ als Sinus-Reihe, also Das leistet die Fourier-Reihe von $u_0(x)$, also

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) \sin nx \; dx$$

Offensichtlich erhält man genau die gleiche Lösung wie vorhin. Die vorgestellte Methode, Lösungen mit Hilfe eines Separationsansatzes zu konstruieren, führt also hier unmittelbar auf Fourier-Reihen.

Kapitel 13

Fourier- und Laplace-Transformation

13.1 Fourier-Transformation für periodische Funktionen

Wir fassen die Erkenntnisse über Fourier-Reihen in komplexer Schreibweise zusammen:

Für $f \in R[-\pi, \pi]$ gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \, dy,$$

wobei das Gleichheitszeichen im Sinne der L^2-Konvergenz zu verstehen ist. Wir können f und ihre Fourier-Reihe auch als 2π-periodische Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ betrachten und können somit jede 2π-periodische Funktion, deren Einschränkung auf $[-\pi, \pi]$ in $R[-\pi, \pi]$ liegt, in eine Fourier-Reihe entwickeln.

Wir führen nun eine leicht veränderte Schreibweise für Fourier-Reihen ein:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \, e^{inx} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \, dy. \tag{13.1}$$

Wir diskutieren die beiden Formeln in (13.1) zunächst getrennt:

Durch die zweite Formel in (13.1) wird der Funktion $f \in R[-\pi, \pi]$ eine Folge $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ über der Indexmenge $\mathbb{Z}$ (statt wie bisher $\mathbb{N}$) zugeordnet. Diese Zuordnung (Abbildung) heißt die Fourier-Transformation.

Die erste Formel in (13.1) ordnet einer Folge $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Funktion als Grenzwert der entsprechenden trigonometrischen Reihe im Sinne der L^2-Norm zu. Diese Zuordnung heißt die Fourier-Rücktransformation.

Für $f \in R[-\pi, \pi]$ wissen wir, dass f Grenzwert seiner Fourier-Reihe ist, dass also die Fourier-Rücktransformation f zurückliefert. Das bedeutet, dass die Fourier-Rücktransformation die Inverse der Fourier-Transformation ist.

Mit dieser neuen Notation lautet die Parsevalsche Gleichung:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

Definition 13.1. *Die Menge aller Funktionen $a\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a(n)|^2 < \infty$$

wird mit $\ell^2(\mathbb{Z})$ bezeichnet. Das ℓ^2-Produkt und die ℓ^2-Norm sind folgendermaßen gegeben:

$$\langle a, b\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \cdot \overline{b(n)}, \quad |a|_{\ell^2} = \sqrt{\langle a, a\rangle_{\ell^2}} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a(n)|^2}$$

Mit dieser Definition und der Parsevalschen Gleichung wird $\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Die Fourier-Transformation wird zur Abbildung

$$\mathcal{F}\colon R[-\pi, \pi] \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}(f) = \hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}, \; \boxed{\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \, dy}$$

und die Fourier-Rücktransformation ist ihre Inverse:

$$\mathcal{F}^{-1}\colon \mathcal{F}(R[-\pi, \pi]) \subset \ell_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow R[-\pi, \pi] \quad \text{mit} \quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \, e^{inx}}$$

Man sieht sofort, dass $\mathcal{F}$ und damit auch ihre Umkehrabbildung linear sind:

$$\boxed{\mathcal{F}(a\, f + b\, g) = a\, \mathcal{F}(f) + b\, \mathcal{F}(g)}$$

Die Parsevalsche Gleichung und die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung lauten nun:

$$\boxed{\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \, \|\mathcal{F}(f)\|_{\ell^2}^2} \quad \text{und} \quad \boxed{\langle f, g\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \, \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle_{\ell^2}}$$

Zur Notation: Die L^2-Norm und das L^2-Produkt zur besseren Unterscheidbarkeit von der ℓ^2-Norm und dem ℓ^2-Produkt von nun an mit $\|.\|_{L^2}$ und $\langle ., .\rangle_{L^2}$ bezeichnet.

Eine besonders wichtige weitere Eigenschaft betrifft die Fourier-Transformation der Ableitung f'. Für den Fall, dass f stetig differenzierbar und $f(-\pi) = f(\pi)$ gilt, also f 2π-periodisch ist, gilt (siehe Satz 12.8):

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n' \, e^{inx} \quad \text{mit} \quad c_n' = in \, c_n$$

Also

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi} c'_n = \frac{1}{2\pi} in\, c_n = in\, \hat{f}(n).$$

D.h.:

$$\boxed{\mathcal{F}(f')(n) = in\, \mathcal{F}(f)(n)}$$

Entsprechend folgt für höhere Ableitungen

$$\boxed{\mathcal{F}(f^{(k)})(n) = (in)^k\, \mathcal{F}(f)(n)}$$

Einige weitere einfache Rechenregeln:

Satz 13.1. *Sei f eine 2π-periodische Funktion, die auf $[-\pi, \pi]$ R-integrierbar ist.*

1. *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion h mit $h(x) = f(x - x_0)$ ebenfalls 2π-periodisch und es gilt:*
$$\hat{h}(n) = e^{-inx_0} \hat{f}(n).$$

2. *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Funktion h mit $h(x) = e^{in_0 x} f(x)$ ebenfalls 2π-periodisch und es gilt:*
$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n - n_0)$$

Beweis. Zu 1.

$$\hat{h}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - x_0)\, e^{-inx}\, dx = \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(y)\, e^{-in(y+x_0)}\, dy = e^{-inx_0} \int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(y)\, e^{-iny}\, dy$$

Nun gilt:

$$\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(y)\, e^{-iny}\, dy = \int_{-\pi-x_0}^{-\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy + \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy + \int_{\pi}^{\pi-x_0} f(y)\, e^{-iny}\, dy$$

und (wegen der 2π-Periodizität)

$$\int_{-\pi-x_0}^{-\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy = \int_{\pi-x_0}^{\pi} f(y)\, e^{-iny}\, dy = -\int_{\pi}^{\pi-x_0} f(y)\, e^{-iny}\, dy$$

□

Beispiele

- Sei $a \in \mathbb{R}$ und f 2π-periodisch. Dann ist $g(x) = f(x + a) + f(x - a)$ ebenfalls 2π-periodisch und es gilt:
$$\hat{g}(n) = e^{ina} \widehat{f}(n) + e^{-ina} \widehat{f}(n) = 2\cos(an)\, \widehat{f}(n). \tag{13.2}$$

- Sei $F(x)$ eine Stammfunktion der 2π-periodischen Funktion f. Dann ist $G(x) = F(x+a) - F(x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ ebenfalls 2π-periodisch und es gilt wegen $G'(x) = f(x+a) - f(x-a)$:

$$e^{ina}\widehat{f}(n) - e^{-ina}\widehat{f}(n) = \widehat{G'}(n) = in\,\widehat{G}(n)$$

also

$$\widehat{G}(n) = \frac{1}{in}\left(e^{ina} - e^{-ina}\right)\widehat{f}(n) = 2\,\frac{\sin(an)}{n}\,\widehat{f}(n) \tag{13.3}$$

Ein weiterer wichtiger Satz:

Satz 13.2. *Seien f und g 2π-periodische Funktionen, die auf $[-\pi,\pi]$ R-integrierbar sind. Dann ist auch die Faltung $f * g$, gegeben durch*

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(x-y)\;dy$$

2π-periodische Funktion und es gilt:

$$\widehat{f*g}(n) = \frac{1}{2\pi}\,\hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(x-y)\;dy\,e^{-inx}\;dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,e^{-iny}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\,e^{-in(x-y)}\;dx\right)\;dy\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann sofort aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\,e^{-in(x-y)}\;dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z)\,e^{-inz}\;dz = \int_{-\pi}^{\pi} g(z)\,e^{-inz}\;dz$$

□

Anwendung: Periodische Lösungen der Wellengleichung

Wir suchen eine Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

die die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$$

für gegebene 2π-periodische Funktionen $u_0(x)$ und $v_0(x)$ erfüllt, und die bezüglich x 2π-periodisch ist.

Wir gehen genauso vor wie bei der Wärmeleitgleichung: Für $u(x,t)$ wird eine Fourier-Reihe als Ansatz gewählt. Diese Fourier-Reihe wird in der Differentialgleichung und den Anfangsbedingungen eingesetzt und termweise verglichen. Das entspricht genau der Anwendung der Fourier-Transformation auf die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen und führt auf die folgenden Bedingungen an die Fourier-Transformation $\hat{u}(n,t)$:
Transformierte Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(n,t) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(.,t)\right)(n) = \mathcal{F}\left(c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(.,t)\right)(n) = (in)^2 c^2\,\hat{u}(n,t) = -n^2 c^2\,\hat{u}(n,t)$$

Transformierte Anfangsbedingungen:

$$\hat{u}(n,0) = \mathcal{F}\left(u(.,0)\right)(n) = \mathcal{F}\left(u_0\right)(n) = \boxed{\widehat{u_0}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\, e^{-inx}\; dx}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(n,0) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(.,0)\right)(n) = \mathcal{F}\left(v_0\right)(n) = \boxed{\widehat{v_0}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} v_0(x)\, e^{-inx}\; dx}$$

Allgemeine Lösung der obigen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung für $\hat{u}(n,t)$:

$$\hat{u}(n,t) = C_1(n)\,\cos(nct) + C_2(n)\,\sin(nct)$$

Wegen

$$\hat{u}(n,0) = C_1(n) = \widehat{u_0}(n), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(n,0) = nc\,C_2(n) = \widehat{v_0}(n)$$

erhält man aus den Anfangsbedingungen die spezielle Lösung:

$$\hat{u}(n,t) = \widehat{u_0}(n)\,\cos(nct) + \frac{\widehat{v_0}(n)}{nc}\,\sin(nct)$$

Damit sind die Fourier-Koeffizienten berechnet. Die Konstruktion der Lösung aus den Koeffizienten ihrer Fourier-Reihe entspricht genau der Fourier-Rücktransformation und wir erhalten die Lösung

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\widehat{u_0}(n)\,\cos(nct) + \frac{\widehat{v_0}(n)}{nc}\,\sin(nct)\right] e^{inx}}$$

Bei diesem Beispiel lässt sich die Lösung wesentlich einfacher darstellen. Dazu benutzen wir die Rechenregeln der Fourier-Transformation. Wegen (13.2) und (13.3) gilt:

$$\widehat{u_0}(n)\,\cos(nct) = \widehat{g}(n,t) \quad \text{mit } g(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right)$$

und

$$\frac{\widehat{v_0}(n)}{nc}\sin(nct) = \widehat{G}(n,t) \quad \text{mit } G(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\; dy$$

Somit erhalten wir die folgende Darstellung der Lösung (d'Alembert):

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\; dy}$$

13.2 Die kontinuierliche Fourier-Transformation

Wir betrachten nun nicht notwendig periodische Funktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ und führen analog zum periodischen Fall die folgende Transformation ein:

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\; dx \quad \text{für} \quad \omega \in \mathbb{R}}$$

für den Fall, dass das uneigentliche Integral für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert.

Schreibweise: $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$.

Beispiele

- Rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \mapsto \quad \hat{f}(\omega) = \pi\, e^{-|\omega|}$$

- Gaußsche Glockenkurve:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \mapsto \quad \hat{f}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\,\omega^2}.$$

Die Fourier-Rücktransformation wird folgendermaßen eingeführt:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\; d\omega \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}}$$

für den Fall, dass das uneigentliche Integral für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert.

Satz 13.3. *Falls die Integrale existieren, gilt für $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$: $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$.*

Beweisidee. Zu zeigen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\, x}\; d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\,\omega\, y}\; dy\right] e^{i\,\omega\, x}\; d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\,\omega\,(x-y)}\; dy\right] d\omega = 2\pi\, f(x)\end{aligned}$$

Direkte Anwendung des Satzes von Fubini ist nicht möglich, da $f(y)e^{i\,\omega\,(x-y)}$ als Funktion von y und ω kein endliches Integral über $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ besitzt.

Trick:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\,x}\;d\omega=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\,x}\phi(\varepsilon\omega)\;d\omega\quad\text{mit}\quad\phi(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Aus dem Satz von Fubini und der Substitution $z=y-x$ folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\,x}\,\phi(\varepsilon\omega)\;d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{i\,\omega\,(x-y)}\;dy\right]\phi(\varepsilon\omega)\;d\omega$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\omega\,(x-y)}\,\phi(\varepsilon\omega)\;d\omega\right]\;dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+z)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\varepsilon\,\omega)\,e^{-i\,z\,\omega}\;d\omega\right]\;dz$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\varepsilon\,\omega)\,e^{-i\,z\,\omega}\;d\omega=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\,e^{-i\,\frac{z}{\varepsilon}\,\xi}\;d\xi=\frac{1}{\varepsilon}\,\hat{\phi}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\,\phi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\,e^{-\frac{z^2}{2\varepsilon^2}}$$
$$=2\pi\,\delta_\varepsilon(z)\quad\text{mit}\quad\delta_\varepsilon(z)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{2\varepsilon^2}}$$

Daher

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\,x}\,\phi(\varepsilon\omega)\;d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}f(x+z)\,\delta_\varepsilon(z)\;dz$$

und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\,x}\;d\omega=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\,\omega\,x}\,\phi(\varepsilon\omega)\;d\omega=2\pi\,\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+z)\,\delta_\varepsilon(z)\;dz=2\pi\,f(x)$$

$\square$

Wichtige Identitäten:

Satz 13.4. *Falls die Integrale existieren, gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\hat{h}(x)\;dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,h(\omega)\;d\omega$$

Verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\overline{g(x)}\;dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\;d\omega$$

Parsevalsche Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\;dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2\;d\omega$$

Beweis. Zu 1.:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{h}(x)\ dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)e^{-i\omega x}\ d\omega\right)\ dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx\right)h(\omega)\ d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)h(\omega)\ d\omega\end{aligned}$$

Zu 2.:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)e^{i\omega x}\ d\omega, \quad \text{also} \quad \overline{g(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{g}(\omega)}e^{-i\omega x}\ d\omega = \frac{1}{2\pi}\hat{\overline{\hat{g}}}(x),$$

Also gilt für $h(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)}$: $\hat{h}(x) = 2\pi\,\overline{g}(x)$. Die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung folgt dann aus der ersten Identität für $h(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)}$. Die Parsevalsche Gleichung folgt aus der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung für $f = g$.

□

Es gelten analoge Rechenregeln wie für die Fourier-Transformation für periodische Funktionen:

- $\mathcal{F}(a\,f + b\,g) = a\,\mathcal{F}(f) + b\,\mathcal{F}(g)$
- $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\,\mathcal{F}(f)(\omega)$
- $\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k\,\mathcal{F}(f)(\omega)$
- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$ mit $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,g(x-y)\ dy$ (Faltung)
- Für $h(x) = f(x - x_0)$ gilt: $\hat{h}(\omega) = e^{-i\omega x_0}\hat{f}(\omega)$
- Für $h(x) = e^{i\omega_0 x}f(x)$ gilt: $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$
- Für $h(x) = f(c\,x)$ gilt: $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right)$

Anwendung: Lösungen der Wellengleichung

Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x,t) = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$$

Basierend auf den analogen Rechenregeln erhält man auf völlig gleiche Weise die folgende Lösung (d'Alembert)

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\ dy}$$

Anwendung: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = u_0(x)$$

Transformierte Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = a\,(i\omega)^2\,\hat{u}(\omega,t) = -a\,\omega^2\,\hat{u}(\omega,t)$$

Transformierte Anfangsbedingung:

$$\hat{u}(\omega,0) = \widehat{u_0}(\omega)$$

Lösung:

$$\hat{u}(\omega,t) = \widehat{u_0}(\omega)\cdot e^{-a\omega^2 t} = \widehat{u_0}(\omega)\cdot \hat{g}(\omega,t) \quad \text{mit} \quad \hat{g}(\omega,t) = e^{-a\omega^2 t}.$$

Rücktransformation:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\cdot g(x-y,t)\;dy,$$

wobei $g(x,t)$ die Rücktransformation von $\hat{g}(\omega,t)$ ist:

$$g(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega,t)\,e^{i\omega x}\;d\omega.$$

Es gilt:

$$\mathcal{F}\colon\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \;\mapsto\; e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{und daher} \quad \mathcal{F}\colon\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(cx)^2} \;\mapsto\; \frac{1}{|c|}e^{-\frac{\omega^2}{2c^2}}$$

Mit $\frac{1}{2c^2} = at$, also $c = \frac{1}{\sqrt{2at}}$ erhält man

$$\mathcal{F}\colon\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{4at}} \;\mapsto\; \sqrt{2at}\,e^{-a\omega^2 t} \quad \text{und daher} \quad \mathcal{F}\colon\;\frac{1}{\sqrt{4a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4at}} \;\mapsto\; e^{-a\omega^2 t} = \hat{g}(\omega,t)$$

Also

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4at}}$$

und daher

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}}\;dy}$$

13.3 Die Laplace-Transformation

Für eine Funktion $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ führt man die Laplace-Transformation folgendermaßen ein:

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}$$

für jene $s \in \mathbb{C}$, für die das Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)\, dt \tag{13.4}$$

existiert.

Schreibweise: $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$.

Beispiele:

- $f(t) = 1$: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$ für $\operatorname{Re} s > 0$.
- $f(t) = t$: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = -\frac{1}{s}\left(e^{-st}\, t\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2}$ für $\operatorname{Re} s > 0$.
- $f(t) = \frac{t^n}{n!}$: $F(s) = \frac{1}{s^{n+1}}$ für $\operatorname{Re} s > 0$.
- $f(t) = e^{ct}$: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}\, dt = \frac{1}{s-c}$ für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$.
- $f(t) = \cos at = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})$ mit $a \in \mathbb{R}$: $F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}$ für $\operatorname{Re} s > 0$.
- $f(t) = \sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})$ mit $a \in \mathbb{R}$: $F(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}$ für $\operatorname{Re} s > 0$.

Existenz:

Satz 13.5. *Falls der Grenzwert in* (13.4) *für* $s_0 \in \mathbb{C}$ *existiert, existiert der Grenzwert in* (13.4) *auch für* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$.

Das folgt im Wesentlichen aus folgender Darstellung, die man mit Hilfe der partiellen Integration erhält:

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-st} f(t)\, dt &= \int_0^R e^{-(s-s_0)t}\, e^{-s_0 t} f(t)\, dt \\ &= e^{-(s-s_0)R} \int_0^R e^{-s_0 t} f(t)\, dt + (s-s_0) \int_0^R e^{-(s-s_0)t} \left[\int_0^t e^{-s_0 u} f(u)\, du\right] dt\end{aligned}$$

Damit gibt es nur drei Möglichkeiten für den Definitionsbereich von $F(s)$:

1. $F(s)$ existiert für kein $s \in \mathbb{C}$.

2. $F(s)$ existiert für alle $s \in \mathbb{C}$.

3. Es gibt ein $s_0 \in \mathbb{R}$, sodass $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > s_0$ existiert und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s < s_0$ nicht existiert. s_0 heißt Konvergenzabszisse von $F(s)$.

Zusammenhang mit der Fourier-Transformation:

Sei $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ und sei $\bar{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

gegeben, dann gilt offensichtlich

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\, \bar{f}(t)\; dt$$

Sei s_0 die Konvergenzabszisse von $F(s)$: Dann existiert $F(\gamma+i\omega)$ für alle $\gamma > s_0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ und wir erhalten:

$$\mathcal{L}(f)(\gamma+i\omega) = F(\gamma+i\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\gamma+i\omega)\,t}\, \bar{f}(t)\; dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma\,t}\, \bar{f}(t)\, e^{-i\omega\,t}\; dt = \mathcal{F}(\bar{f}_\gamma)(\omega)$$

mit

$$\bar{f}_\gamma(t) = e^{-\gamma\,t}\, \bar{f}(t).$$

Laplace-Rücktransformation:

Für $\gamma > s_0$ und $t \geq 0$ gilt:

$$f(t) = e^{\gamma t}\, \bar{f}_\gamma(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma+i\omega)\, e^{i\omega t}\; d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma+i\omega)\, e^{(\gamma+i\omega)t}\; d\omega$$

oder, kurz mit Hilfe des komplexen Kurvenintegrals:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)\, e^{st}\; ds}$$

Weitere wichtige Eigenschaften der Laplace-Transformation:

- $\mathcal{L}(a\,f + b\,g) = a\,\mathcal{L}(f) + b\,\mathcal{L}(g)$
- $\mathcal{L}(f')(s) = s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$
- $\mathcal{L}(f^{(k)})(s) = s^k\,\mathcal{L}(f)(s) - \sum_{\ell=0}^{k-1} f^{(\ell)}(0)\, s^{k-\ell-1}$
- $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$ mit $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\; du$ (Faltung)

- Für $h(t) = f(c\,t)$ gilt: $H(s) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{s}{c}\right)$
- Für $h(t) = f(t - t_0)$ gilt: $H(s) = e^{-t_0 s} F(s)$
- Für $h(t) = e^{s_0 t} f(t)$ gilt: $H(s) = F(s - s_0)$

Anwendung: Anfangswertproblemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Differentialgleichung:

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

Anfangsbedingung

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}.$$

Lösungsstrategie:

- Durch Übergang von $y(t)$ zur Laplace-Transformierten $Y(s)$ entsteht aus Differentialgleichung und Anfangsbedingungen eine algebraische Gleichung für $Y(s)$.
- Mit Hilfe der Laplace-Rücktransformation erhält man die gesuchte Lösung $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)(t)$.

Beispiel: Anfangswertproblem

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Laplace-Transformation:

$$s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0) - 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = F(s)$$

also:

$$(s-1)^2 Y(s) = F(s) + s - 3$$

und daher

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s-1)^2} + \frac{s-3}{(s-1)^2} = F(s) \cdot G(s) + H(s)$$

mit

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \text{und} \quad H(s) = \frac{s-3}{(s-1)^2}.$$

Laplace-Rücktransformation:

$$y(t) = (f * g)(t) + h(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G)(t) \quad \text{und} \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H)(t)$$

Aus den Beispielen und den Rechenregeln der Laplace-Transformation erhält man sofort

$$g(t) = e^t\, t$$

Aus der Partialbruchzerlegung von $H(s)$

$$H(s) = \frac{s-3}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} \quad \text{mit} \quad A = 1 \quad \text{und} \quad B = -2$$

folgt ebenfalls mit den Beispielen und den Rechenregeln

$$h(t) = e^t \cdot 1 - 2e^t t = (1-2t)e^t.$$

Die Lösung lautet daher:

$$y(t) = \int_0^t f(u)\,(t-u)\,e^{t-u}\;du + (1-2t)e^t$$

Für allgemeinere Probleme dieser Art benötigt man die Laplace-Rücktransformation von rationalen Funktionen. Strategie: Partialbruchzerlegung

Anwendung: Regelungstheorie

Beispiel: Lineares zeitinvariante System:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\,x(t) + b\,u(t), \quad x(0) = 0 \\ y(t) &= c\,x(t) + d\,u(t) \end{aligned}$$

Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned} sX(s) &= a\,X(s) + b\,U(s) \\ Y(s) &= c\,X(s) + d\,U(s) \end{aligned}$$

Also

$$X(s) = \frac{b}{s-a} \cdot U(s)$$

und daher

$$Y(s) = \left[\frac{bc}{s-a} + d\right] \cdot U(s) = G(s) \cdot U(s)$$

mit der so genannten Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{bc}{s-a} + d$$

Es gilt

$$G(s) = G_0(s) + d \quad \text{mit} \quad G_0(s) = \frac{bc}{s-a}$$

und daher

$$Y(s) = G_0(s) \cdot U(s) + d \cdot U(s).$$

Laplace-Rücktransformation:

$$y(t) = (g_0 * u)(t) + d\,u(t) = \int_0^t g_0(t-\tau)\,u(\tau)\;d\tau + d\,u(t)$$

mit

$$g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_0)(t) = b\,c\,e^{at}.$$

Also:

$$y(t) = b\,c\int_0^t e^{a(t-\tau)}\,u(\tau)\;d\tau + d\,u(t)$$