

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS X 31.1. 2013 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵ Uhr; Raum : S2 044): **36** – **39**

3.2.2 Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

36* Schreiben Sie die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.7)-(3.8) in Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad (3.15)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (3.16)$$

$$z = z \quad (3.17)$$

für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten.

3.2.3 Die Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern (Couette-Taylor Strömung)

In den Übungsaufgaben 37 und 38 soll das Strömungsfeld (= Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} und Druckfeld p) zwischen zwei unendlich ausgedehnten, coaxialen Zylindern mit den Radien R_1 und R_2 , die sich mit der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 bewegen, beschimmt werden (siehe Abbildung 2). Zur Lösung dieses Problem bieten sich wieder die Zylinderkoordinaten an. In der Übungsaufgabe 36 haben wir die stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (3.7)-(3.8) in Zylinderkoordinaten für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ mit den Komponenten v_r, v_φ und v_z in Richtung der Zylinderkoordinaten aufgeschrieben. Offenbar ist nur die φ -Komponente v_φ des Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} von 0 verschieden. Des Weiteren hängen v_φ und auch der Druck p offenbar nicht von φ und z ab, d.h.

$$p = p(r) \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r(r, \varphi, z) \\ v_\varphi(r, \varphi, z) \\ v_z(r, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi(r) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Setzt man diesen Ansatz in die, in der Übungsaufgabe 36 abgeleiteten, stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten ein, erhält man einfache zu lösende Bestimmungsgleichungen für $v_\varphi(r)$ und $p(r)$.

37-TP2Bak Bestimmen Sie $v(r)$!

38-TP2Bak Bestimmen Sie $p(r)$!

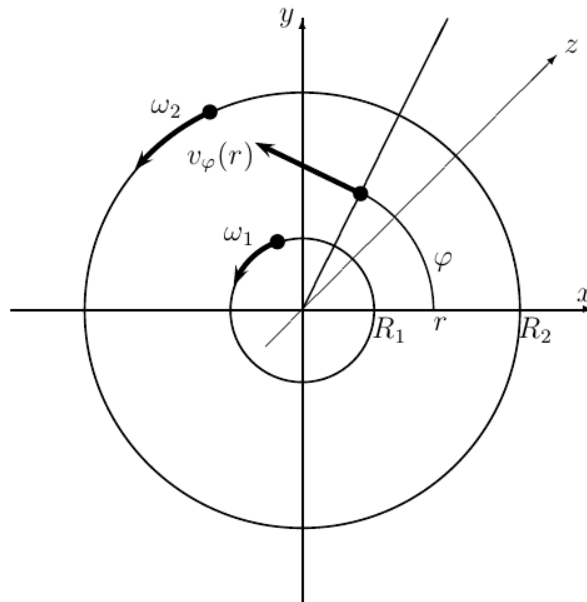


Abbildung 2: Querschnitt durch einen (endlosen) Doppelzylinder mit zwei sich verschieden schnell drehenden Mänteln.

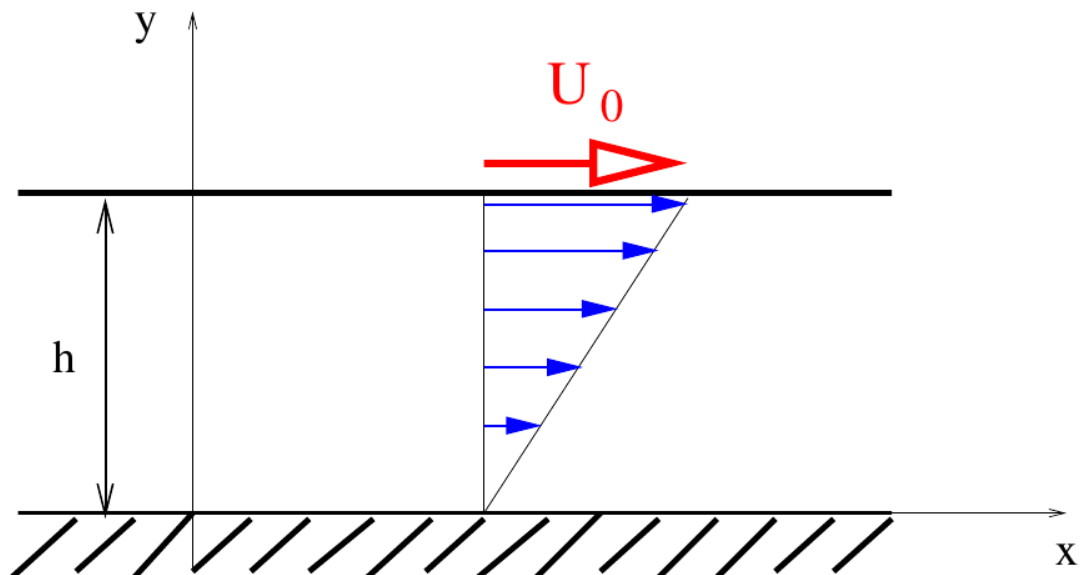
3.2.4 Die Strömung zwischen zwei Platten

39-TP2Bak

Man berechne das ebene (die Platten seien in Querrichtung genügend weit ausgedehnt) Strömungsfeld eines inkompressiblen Newtonschen Fluids zwischen zwei Platten, wobei sich eine Platte mit der konstanten Geschwindigkeit $U_0 > 0$ parallel zur anderen Platte bewegen möge (siehe Skizze). Die Strömung sei zeitlich und räumlich voll ausgebildet. Bei welcher H_a - Zahl

$$H_a = \frac{-\frac{dp}{dx}(2h)^2}{U_0\mu}$$

tritt (bezüglich aus der Skizze ersichtlichen x -Richtung (x_1 -Richtung)) teilweise Rückströmung auf ?



Hinweise:

1. Gehen Sie von den 3D Navier-Stokes Gleichungen aus:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

2. Vereinfachen Sie dann diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Annahmen:

(a) Die Strömung sei zeitlich voll ausgebildet.

(b) Die Strömung sei räumlich voll ausgebildet.

(c) Die Strömung sei eben.

(d) $f := (f_x, f_y, f_z)^T = 0$.

3. Wie sich zeigt, hängt das Strömungsbild vor allem vom Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ ab. Skizzieren Sie sich einige Geschwindigkeitsprofile und erklären Sie diese anschaulich !