P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS III 15.11. 2012 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : S2 044): 09 – 15

1.5 3D stationäre Wärmeleitprobleme: Allgemeine Bilanzierungstechnik und Greensche Formel (Teamprojekt 2)

◯ Wir betrachten ein stationäres, 3D Wärmeleitproblem in einem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset R^3$, das durch Volumenwärmequellen mit der Wärmeintensitätfunktion $f(x)$, $x \in \Omega$, aufgeheizt wird und aus inhomogenem und thermisch allgemein leitendem Material besteht, d.h. die Wärmeleitfähigkeit wird durch einen symmetrischen Wärmeleittensor

$$\Lambda(x) = (\lambda_{ij}(x))_{i,j=1,2,3} = \Lambda^T(x) \quad \dot{\forall} x \in \Omega \tag{1.3}$$

beschrieben, der die folgenden Eigenschaften hat: $\exists\, \underline{\lambda}, \overline{\lambda} = \text{const} > 0$:

$$\underline{\lambda}\, \|\xi\|^2_{R^3} \leq (\Lambda(x)\xi, \xi)_{R^3} \leq \overline{\lambda}\, \|\xi\|^2_{R^3} \quad \forall \xi \in R^3,\ \dot{\forall} x \in \Omega \tag{1.4}$$

(Bem.: isotrop: $\Lambda(x) = \lambda(x) I$; orthodtrop: $\Lambda(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))$). Auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ seien Randbedingungen erster (auf Γ_1), zweiter (auf Γ_2) und dritter (auf Γ_3) vorgegeben, wobei $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ for $i \neq j$.

09-TP Stellen Sie die Wärmemengebilanzgleichung für ein beliebiges Lipschitz-Teilgebiet G von Ω auf und leiten Sie unter Verwendung des Fourierschen Gesetzes $\sigma = -\Lambda \nabla u$ die Integralbilanzformulierung (Bilanzformulierung) der Wärmeleitgeleichung her !

10-TP Leiten Sie unter Verwendung der Greenschen Formel die differentielle Form der Wärmeleitgleichung (klassische Formulierung) her ! Welche Voraussetzungen müssen Sie an die Daten stellen ?

11-TP Wenden Sie nun die allgemeine Bilanzierungstechnik auf ein Wärmeleitproblem, dessen Rechengebiet aus zwei Materialien besteht, d.h. $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, $\Gamma_I = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ (Interface), $\Lambda = \Lambda_i$, $f = f_i$ in Ω_i für $i = 1, 2$, an und leiten Sie wieder die differentielle Form der Wärmeleitgeleichung (partielle Differentialgleichung in Ω_1 und Ω_2, Interfacebedingungen, Randbedingungen) ab !

12-TP Leiten Sie dann aus der partiellen Differentialgleichung in Ω_1 und Ω_2, den Interfacebedingungen und den Randbedingungen die Variationsformulierung her !

1.6 Instationäre Wärmeleitprobleme

1.6.1 Abkühlung eines Kupferstabes

○ Für einen mantelisolierten Kupferstab $\left(\rho = 8960\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},\ \ c = 384\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}},\ \ \lambda = 394\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\right)$ der Länge $L = 1$ m und mit Durchmesser $d = 1$ cm, der wärmequellenfrei ($f = 0$) ist, an beiden Rändern mit der gleichen Temperatur $u_a(t) = u_b(t) = g(t) := 60°\mathrm{C}$ gekühlt wird und für $t_A = 0$ die Anfangstemperaturverteilung $u_0(x) = 60° + 40° \sin(\pi x/L)$ besitzt, soll der Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt und die Temperatur nach einer Stunde $t_E = 1\mathrm{h}$ ermittelt werden. Beachten Sie die Masseinheiten.

$\boxed{13}$ Modellieren Sie das oben beschriebene instationäre Wärmeleitproblem in integraler Form (Bilanzform).

$\boxed{14}$ Leiten Sie die differentielle Form (klassische Formulierung) her. Sind die dafür notwendigen Voraussetzungen erfüllt?

$\boxed{15^\star}$ Lösen Sie die ARWA aus $\boxed{14}$ analytisch und bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt $t = t_* > 0$ die Temperatur u im gesamten Stab erstmals kleiner oder höchstens gleich $70°$ C ist.