Die differentielle Form der Wärmeleitgleichung bei orthotropem und homogenem Material und stetig verteilten Wärmequellen

Voraussetzungen:

$$(11)\quad \begin{cases} (V1) & f \in C(\Omega) \\ (V2) & \lambda_i \in C^1(\Omega),\ \exists\, \underline{\lambda}, \overline{\lambda} = \text{const} > 0:\ \underline{\lambda} \le \lambda_i(x) \le \overline{\lambda}\ \ \forall x \in \Omega,\ i = \overline{1,3} \\ (V3) & g \in C(\Gamma) \\ [V4] & u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad [\Rightarrow \sigma_i \in C^1(\Omega),\ i = \overline{1,3}] \end{cases}$$

Unter Verwendung von (Beweis siehe PS 1)

$$(12)\quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \Delta x_3 \to 0}} \frac{1}{\Delta x_k \Delta x_j} \int_{x_k - \frac{\Delta x_k}{2}}^{x_k + \frac{\Delta x_k}{2}} \int_{x_j - \frac{\Delta x_j}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x_j}{2}} \left[\frac{\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{x_i + \frac{\Delta x_i}{2}} - \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{x_i - \frac{\Delta x_i}{2}}}{\Delta x_i} \right] d\xi_j \, d\xi_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) = - \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i}(x)$$

und

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i = \overline{1,3}}} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

$$= f(x_1, x_2, x_3)$$

erhalten wir aus

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ i = 1,2,3}} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \quad (10) \text{ Bilanzform}$$

die