

**ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 27. 06. 2012

97. Zeigen Sie für $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k \neq \ell$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung der Kosinusfunktion mit Hilfe der Exponentialfunktion.

98. Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(kx) dx.$$

99. Zeigen Sie, dass eine Funktion der Form

$$u(x, t) = v(t)w(x)$$

die Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

erfüllt, falls $v(t)$ und $w(x)$ die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen:

$$v'(t) = a \lambda v(t) \tag{1}$$

und

$$w''(x) = \lambda w(x), \tag{2}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Hinweis: Setzen Sie $u(x, t) = v(t)w(x)$ in die Wärmeleitgleichung ein.

100. Bestimmen Sie alle Lösungen $w(x)$ von (2). Unterscheiden Sie dazu die Fälle $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ und $\lambda < 0$. Zeigen Sie:

- (a) Für $\lambda \geq 0$ gibt es außer der trivialen Lösung 0 (Nullfunktion) keine weiteren Lösungen von (2), die zusätzlich die Bedingungen

$$w(0) = w(\pi) = 0 \tag{3}$$

erfüllen.

- (b) Für $\lambda < 0$ gibt es nur dann nicht-triviale Lösungen (Lösungen, die nicht gleich der Nullfunktion sind) von (2), die die Bedingung (3) erfüllen, wenn

$$\lambda = -n^2 \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wie lauten diese Lösungen?

101. Bestimmen Sie für $\lambda = -n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).

102-105. Gesucht ist eine Lösung $u(x, y)$ der Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

- (a) Wählen Sie dazu einen Ansatz für $u(x, y)$ in Form einer reinen Sinusreihe bezüglich der Variablen x :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \sin nx$$

mit Koeffizienten $b_n(y)$ als Funktionen in y . Welche Differentialgleichung erhält man für die Koeffizientenfunktion $b_n(y)$?

- (b) Welche zusätzliche Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen $b_n(y)$ erhält man, um die folgenden zusätzlichen Bedingungen zu erfüllen:

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u(x, \pi) = x \quad \text{für alle } x \in [0, \pi) ?$$

- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen $b_n(y)$ der Differentialgleichung aus (a).
(d) Bestimmen Sie alle Lösungen $b_n(y)$ der Differentialgleichung aus (a), die zusätzlichen Bedingungen aus (b) erfüllen.

Hinweis zu (b): Stellen Sie die Funktionen 0 und x als reine Sinusreihen dar und vergleichen Sie Koeffizienten.