

ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 13. 06. 2012

91. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius ρ und Summenfunktion f . Was lässt sich dann über die Grenzfunktion der Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} \quad \text{für } z \neq 0$$

aussagen? Wie lautet die Grenzfunktion? Für welche $z \in \mathbb{C}$ existiert sie? Für welche $z \in \mathbb{C}$ darf termweise differenziert und integriert werden?

Hinweis: $\frac{1}{z^n} = y^n$ mit $y = \frac{1}{z}$.

92. Zeigen Sie für die Funktion $\bar{f}$ aus Übungsaufgabe 88:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x^{2n}} \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

93. Berechnen Sie die Fourier-Reihen von $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x| \quad \text{und} \quad g(x) = \sinh(\alpha x) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

94. Die n -te Partialsumme $s_n(x)$ der Fourier-Reihe einer R-integrierbaren Funktion f ist durch

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

gegeben. Zeigen Sie:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right] dt$$

Hinweis: $\cos(k(t-x)) = \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx$.

95. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 2m\pi$ für alle $m \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hinweis:

$$\cos(kx) = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) = \frac{1}{2} \left((e^{ix})^k + (e^{-ix})^k \right)$$

Die linke Seite lässt sich also als Summe von 2 endlichen geometrischen Reihen darstellen.

96. Zeigen Sie für $x_m = 2m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k x_m) = \frac{1}{2} + n = \lim_{x \rightarrow x_m} \frac{\sin \left((2n+1) \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right)}$$

Hinweis: d'Hospital.