

**ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 06. 06. 2012

82. Stellen Sie die Hyperbelfunktionen $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ als Potenzreihen dar. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich dieser Potenzreihen.

Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung dieser Funktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion.

83. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

84. Sei $y(x)$ die Summenfunktion der Potenzreihe aus Übungsaufgabe 83. Zeigen Sie für alle x aus dem Konvergenzbereich:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $x^2 y''(x) + xy'(x)$ als Potenzreihe und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Potenzreihe

$$-x^2 y(x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell 4}{((\ell-1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell} \quad \text{mit } \ell = k+1$$

85. Stellen Sie die Funktion $\operatorname{arsinh}(x)$ als Potenzreihe dar. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich dieser Potenzreihe.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie bei der Funktion $\arcsin(x)$ vor und betrachten Sie zunächst die abgeleitete Funktion.

86. Bestimmen Sie für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ eine Stammfunktion $F(x)$ in Form einer Potenzreihe.

Hinweis: Die Taylor-Reihe von $f(x)$ erhält man leicht aus der Taylor-Reihe von e^y für $y = -\frac{1}{2}x^2$.

87. Bestätigen Sie die folgende Identität für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$:

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Hinweis: $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

88. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die n -te Ableitung von $f(x)$ folgende Form hat: Es gibt ein Polynom $p_n(t)$ (vom Grad $3n$) mit

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

Hinweis: Induktion

89. Betrachten Sie folgende Erweiterung $\bar{f}$ der Funktion f aus Übungsaufgabe 88 auf den größeren Definitionsbereich $\mathbb{R}$:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion $\bar{f}$ ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\bar{f}^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Induktion und

$$\bar{f}^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{f}^{(n)}(h) - \bar{f}^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} \cdot p_n\left(\frac{1}{h}\right)}{e^{\frac{1}{h^2}}}$$

90. Wie lautet die Taylor-Reihe der Funktion $\bar{f}$ (siehe Übungsaufgabe 89) um den Punkt $x_0 = 0$? Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe und wie lautet die Summenfunktion?