

**ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 30. 05. 2012

In allen Übungsaufgaben wird folgende Funktion verwendet:

$$\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

73. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \phi(\varepsilon x) \, dx = \int_a^b 1 \, dx = b - a$$

Hinweis: Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \phi(\varepsilon_n x)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1 konvergiert.

74. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(x) \phi(\varepsilon x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

Hinweis: Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = f(x) \phi(\varepsilon_n x)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Beachten Sie dabei, dass eine Riemann-integrierbare Funktion beschränkt ist.

75. Gegeben sei die Funktionenfolge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\delta_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \phi(nx) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(nx)^2}{2}}.$$

Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) \, dx = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \delta_n(x) \, dx = 1$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$:

Hinweis: Substitution $u = nx$.

76. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 75: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x \cdot \delta_n(x) \, dx = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x^2 \cdot \delta_n(x) \, dx = 0$$

Hinweis: Substitution $u = nx$.

77. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 75: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x^k \cdot \delta_n(x) \, dx = 0$$

Hinweis für $k > 2$: $|x^k| \leq C \cdot x^2$ mit $C = \sup\{|x|^{k-2} : x \in [a, b]\}$.

78. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 75, für alle Polynomfunktionen p und alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) \cdot \delta_n(x) \, dx = p(0).$$

Hinweis: $p(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$.

79. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 75:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x) \, dx = f(0).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass es eine Folge von Polynomfunktionen p_m gibt, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen die stetige Funktion f konvergiert.

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x) \, dx - f(0) \\ &= \int_a^b [f(x) - p_m(x)] \cdot \delta_n(x) \, dx + \left[\int_a^b p_m(x) \cdot \delta_n(x) \, dx - p_m(0) \right] + [p_m(0) - f(0)] \end{aligned}$$

Der erste und der dritte Term lassen sich jeweils durch $\|f - p_m\|_\infty$ abschätzen. Ist m hinreichend groß, werden diese Terme beliebig klein.

80. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 75: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b < 0$ oder $0 < a < b$ gilt:

$$\delta_n \xrightarrow{\text{glm}} 0 \quad \text{auf dem Definitionsbereich } X = [a, b].$$

81. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b < 0$ oder $0 < a < b$. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 75:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x) \, dx = 0.$$