ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 09. 05. 2012

---

46. Sei $p \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$$

konvergiert.

47. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

konvergiert.

48. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

konvergiert.

49. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1}$$

konvergiert.

50. Seien $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$ und $k \in \mathbb{N}$. Der Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!}$$

Zusätzlich vereinbart man: $\binom{\alpha}{0} = 1$.

(a) Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n < k$:

$$\binom{n}{k} = 0.$$

(b) Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

51. Zeigen Sie:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}.$$

52. Stellen Sie eine ähnliche Formel für $\binom{-\frac{1}{2}}{k}$ auf.

53. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$: Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

konvergiert.

54. Zeigen Sie:

(a) Für $\boxed{\alpha \in \mathbb{N}}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha.$$

Hinweis: $\binom{\alpha}{k} =?$ für $k > \alpha$.

(b) Für $\boxed{\alpha = -1}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha.$$

Hinweis: $\binom{-1}{k} =?$.