ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 02. 05. 2012

---

37. Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit
$$a_n = n^p$$
unbeschränkt ist.
Hinweis: Für jedes $p > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $p \geq \frac{1}{k}$. Also $(a_n)^k = n^{pk} \geq n$.

38. Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p < 0$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit
$$a_n = n^p$$
konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: $a_n = 1/n^{\tilde{p}}$ mit $\tilde{p} = -p$, Übungsaufgabe 37

39. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit
$$a_n = q^n$$
unbeschränkt ist.
Hinweis: Bernoullische Ungleichung

40. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit
$$a_n = q^n$$
konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: $a_n = 1/\tilde{q}^n$ mit $\tilde{q} = 1/q$, Übungsaufgabe 39.

41. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p > 0$ und $0 < q < 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit
$$a_n = n^p \cdot q^n.$$
Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung aus Übungsbeispiel 36 für ein $i \in \mathbb{N}$ mit $p < i$.

42. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p < 0$ und $q > 1$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) mit
$$a_n = n^p \cdot q^n.$$
unbeschränkt ist.
Hinweis: $a_n = 1/\left(n^{\tilde{p}}\tilde{q}^n\right)$.

43. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n^2}$$

konvergiert.

Hinweis: Gehen Sie genau so vor wie bei der Analyse der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$ und zeigen Sie $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}|$.

44. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

konvergiert.

Hinweis: Gehen Sie analog wie bei der Analyse der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, vor: Betrachten Sie die Teilsummen a_1, $a_2 + a_3$, $a_4 + a_5 + a_6 + a_7$, $\ldots$, und schätzen Sie jede dieser Teilsummen durch a_1, $2a_2$, $4a_4$, $\ldots$, nach oben ab. Die Summe dieser oberen Schranken der Teilsummen, also $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$, ist dann eine obere Schranke für die gesamte Summe. Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

45. Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n^\alpha} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

konvergieren bzw. divergieren.

Hinweis für $\alpha > 0$: Analoges Vorgehen wie in den Fällen $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = 2$.