**ÜBUNGEN ZU**

**ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 25. 04. 2012

---

28. Zeigen Sie mit Induktion nur mit Hilfe der Axiome der reellen Zahlen und den in der Vorlesung bewiesenen Folgerungen folgende Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < y$ gilt:
$$x^n < y^n$$

29. Zeigen Sie mit Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 0$ und $q \neq 1$:
$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

30. Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $a, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $(x_0)^k \geq a$. Zeigen Sie für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die durch
$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k}\, x_n + \frac{a}{k \cdot (x_n)^{k-1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$
gegeben ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
$$(x_n)^k \geq a \quad \text{und} \quad x_{n+1} \leq x_n$$
Hinweis zur ersten Ungleichung: Induktion,
$$x_{n+1} = x_n \left[ 1 + \frac{a - (x_n)^k}{k \cdot (x_n)^k} \right]$$
Bernoullische Ungleichung.

Hinweis zur zweiten Ungleichung: folgt direkt aus der ersten Ungleichung.

31. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass die obige Ungleichung zu folgender Ungleichung äquivalent ist:
$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$
Wenden Sie zum Nachweis dieser Ungleichung die Bernoullische Ungleichung an.

32. Zeigen Sie für alle $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$:

$$\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} \leq \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}$$

33. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Hinweis zur oberen Schranke: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz und die Abschätzung aus Übungsbeispiel 32.

34. Seien $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$. Zeigen Sie:

$$\binom{n}{i} \geq \left(\frac{n}{i}\right)^i.$$

Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass sich die obige Ungleichung zu folgender Ungleichung äquivalent ist:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-i+1}{n}\right) \geq \left(\frac{i-1}{i}\right)\cdot\left(\frac{i-2}{i}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{i}\right)$$

Zum Nachweis dieser Ungleichung vergleichen Sie die beiden ersten Faktoren, die beiden zweiten Faktoren, ...

35. Sei $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ und sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Zeigen Sie:

$$(1+x)^n \geq \binom{n}{i}x^i \geq \left(\frac{x}{i}\right)^i \cdot n^i$$

36. Sei $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ und sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$. Zeigen Sie:

$$q^n \leq \left(\frac{i \cdot q}{1-q}\right)^i \cdot \frac{1}{n^i}$$

Hinweis: Finden Sie zu $q$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$q = \frac{1}{1+x}$$

und verwenden Sie anschließend die Abschätzung aus Übungsbeispiel 35.