ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 18. 04. 2012

---

19. Die komplexe Exponentialfunktion e^z wurde in der Vorlesung folgendermaßen eingeführt:
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{für } x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z.$$
Diese Funktion lässt sich auch als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ interpretieren. Stellen Sie diese Funktion auf und überprüfen Sie, ob die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Ist die komplexe Exponentialfunktion holomorph? Wenn ja, wie lautet die Ableitung?

20. Bestimmen Sie durch direkte Verwendung der Definition des komplexen Kurvenintegrals den Wert von
$$\int_C e^z \, dz$$
entlang der Kurve C, die vom Ursprung 0 zu einem Punkt $w \in \mathbb{C}$ entlang einer Geraden führt.

21. Die beiden komplexen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = |z|^2$ stimmen für reelle Argumente mit der reellen Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ überein. Überprüfen Sie, für welche Argumente $z \in \mathbb{C}$ die komplexen Funktionen f und g komplex differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweilige Ableitung.

22. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f\colon U \to \mathbb{C}$ und $g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph in U. Zeigen Sie: Die Funktion $f \cdot g$ ist holomorph in U und es gilt:
$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$
(Das Symbol $\cdot$ bezeichnet hier das Produkt komplexer Zahlen.)

23. Zeigen Sie für die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion:
$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

24. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x + x^2} \, dx.$$

25. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} \, dx.$$

26. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\sin x}\, dx.$$

27. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der rationalen Funktion

$$R(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$