ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 21. 03. 2012

---

10. Sei S jener Teil der Ebene $x + y + 2z = 4$, für den gilt: $x + y \geq 1$ und $x \leq 1$ und $y \leq 1$. Stellen Sie S grafisch dar, finden Sie eine Parameterdarstellung von S und berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$|S| = \int_S 1 \, d\sigma$$

den Flächeninhalt $|S|$ von S.

11. Berechnen Sie für die Fläche S aus Übungsaufgabe 10

$$\int_S f(x,y,z) \cdot n(x,y,z) \, d\sigma \quad \text{für} \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

12. Sei $S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon z = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$ (Kegelmantel). Stellen Sie S grafisch dar, finden Sie eine Parameterdarstellung von S und berechnen Sie den Flächeninhalt $|S|$.

Hinweis: Polarkoordinaten für x und y.

13. Berechnen Sie für die Fläche S aus Übungsaufgabe 12

$$\int_S (x^2 + y^2) \, d\sigma$$

14. Sei $h \in [0,1]$ und $S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } 0 \leq z \leq h\}$. Stellen Sie S grafisch dar, finden Sie eine Parameterdarstellung von S und berechnen Sie

$$\int_S f(x,y,z) \cdot n(x,y,z) \, d\sigma \quad \text{für} \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

15. Das Gaußsche Gesetz für elektrische Felder im Vakuum lautet in integraler Form:

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_V \rho \, dx$$

für "alle" Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand ∂V, wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante, $\vec{E}$ das elektrische Feld, $\vec{n}$ den äußeren Einheitsnormalvektor auf ∂V und ρ die elektrische Ladungsdichte bezeichnen. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung erfüllt ist, falls $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$ mit

$$-\varepsilon_0\,\Delta\phi = \rho.$$

Hinweis zum ersten Teil: Integrieren Sie die Differentialgleichung (1) über V.
Hinweis zum zweiten Teil: $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \Delta\phi$.

16. Das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder lautet in integraler Form:

$$\int_{\partial V} \vec{B}\cdot\vec{n}\;d\sigma = 0$$

für "alle" Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand ∂V, wobei $\vec{B}$ die magnetische Flussdichte und $\vec{n}$ den äußeren Einheitsnormalvektor auf ∂V bezeichnen. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung erfüllt ist, falls $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ mit einem beliebigen Vektorfeld $\vec{A}$.

17. Aus dem Induktionsgesetz von Faraday folgt im stationären Fall:

$$\int_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{x} = 0$$

für "alle" Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Randkurve ∂S. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung erfüllt ist, falls $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$ mit einem beliebigen Skalarfeld ϕ.

Hinweis zum ersten Teil: Integrieren Sie die Differentialgleichung (2) über S.

18. Aus dem Ampèreschen Gesetz folgt im stationären Fall für das Vakuum:

$$\frac{1}{\mu_0}\int_{\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{x} = \int_S \vec{j}\cdot\vec{n}\;d\sigma$$

für "alle" Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Randkurven ∂S, wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante, $\vec{n}$ den Einheitsnormalvektor auf S und $\vec{j}$ die elektrische Stromdichte bezeichnen. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{j}.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung erfüllt ist, falls $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ mit

$$-\frac{1}{\mu_0}\,\Delta\vec{A} = \vec{j} \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\vec{A} = 0.$$

Hinweis: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.