

**ÜBUNGEN ZU
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 14. 03. 2013

1. Sei C die Kurve mit der Parametrisierung $\gamma: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)^T$. Zeigen Sie, dass die Punkte $(x, y)^T = \gamma(t)$ dieser Kurve auf der Hyperbel

$$x^2 - y^2 = 1$$

liegen. Stellen Sie die Kurve C grafisch dar.

2. Berechnen Sie für die Kurve C aus Übungsbeispiel 1

$$\int_C (-y \, dx + x \, dy).$$

3. Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve C aus Übungsbeispiel 1 sind durch

$$\gamma_A = (\cosh a, -\sinh a)^T, \quad \gamma_E = (\cosh a, \sinh a)^T$$

gegeben. Sei C_A die Gerade zwischen dem Ursprung $(0, 0)^T$ und γ_A und sei C_E die Gerade zwischen γ_E und dem Ursprung $(0, 0)^T$. Die geschlossene Kurve $C_A + C + C_E$ umschließt den Bereich B . Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$|B| = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (-y \, dx + x \, dy)$$

den Flächeninhalt von B .

Für die Übungsaufgaben 4 - 9 gelte: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Bereich, für den der Gaußsche Integralsatz gilt, also:

$$\int_B \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \right) dx = \int_{\partial B} f(x) \cdot n(x) \, ds,$$

wobei $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Funktion auf der offenen Menge X mit $B \subset X \subset \mathbb{R}^2$ ist, und ∂B die Menge der Randpunkte (genauer die Randkurve) von B bezeichnet.

4. Zeigen Sie folgende Formel der partiellen Integration für stetig differenzierbare Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ und $i \in \{1, 2\}$:

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) \, dx = \int_{\partial B} f(x) g(x) n_i(x) \, ds - \int_B f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \, dx$$

Hinweis: Gaußscher Integralsatz für $f_1(x) = f(x)g(x)$, $f_2(x) = 0, \dots$

5. Zeigen Sie folgende Formel für stetig differenzierbare Funktionen $\mathbf{f}: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g: X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_B g(x) \operatorname{div} \mathbf{f}(x) \, dx = \int_{\partial B} g(x) \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \, ds - \int_B \mathbf{f}(x) \cdot \nabla g(x) \, dx$$

Hinweis: Übungsaufgabe 4

6. Zeigen Sie folgende Formel (1. Greensche Identität) für stetig differenzierbare Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_B g(x) \Delta f(x) \, dx = \int_{\partial B} g(x) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x) \, ds - \int_B \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) \, dx$$

Hinweis: Übungsaufgabe 5 mit $\mathbf{f} = \nabla f$.

7. Zeigen Sie folgende Formel (2. Greensche Identität) für stetig differenzierbare Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_B \left(g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x) \right) \, dx = \int_{\partial B} \left(g(x) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x) - f(x) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}(x) \right) \, ds$$

Hinweis: Vertauschen Sie f und g in Übungsaufgabe 6.

8. Seien $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Angenommen, die Funktion $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in B$$

und die Randbedingung

$$u(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial B.$$

Zeigen Sie

$$\int_B \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_B f(x) v(x) \, dx$$

für alle stetig differenzierbare Funktionen $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v(x) = 0$ für alle $x \in \partial B$.

Hinweis: 1. Greensche Identität.

9. Seien $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \partial B \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Angenommen, die Funktion $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in B$$

und die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial B.$$

Zeigen Sie

$$\int_B \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_B f(x)v(x) \, dx + \int_{\partial B} g(x)v(x) \, ds$$

für alle stetig differenzierbare Funktionen $v: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Hinweis: 1. Greensche Identität.