ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 15. 06. 2011

---

79. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius ρ und Summenfunktion f. Was lässt sich dann über die Grenzfunktion der Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} \quad \text{für } z \neq 0$$

aussagen? Wie lautet die Grenzfunktion? Für welche $z \in \mathbb{C}$ existiert sie? Für welche $z \in \mathbb{C}$ darf termweise differenziert und integriert werden?

80. Zeigen Sie für die Funktion $\bar{f}$ aus Übungsaufgabe 74:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x^{2n}} \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

81. Berechnen Sie die Fourier-Reihen von $f\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x| \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +1 & \text{für } x \in (0, \pi] \end{cases}.$$

82. Die n-te Partialsumme $s_n(x)$ der Fourier-Reihe einer R-integrierbaren Funktion f ist durch

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \; dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kx \; dt$$

gegeben. Zeigen Sie:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,(t-x)) \right] dt$$

Hinweis: $\cos(k\,(t-x)) = \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx$.

83. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 2m\pi$ für alle $m \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hinweis:

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(e^{ix}\right)^k + \left(e^{-ix}\right)^k\right)$$

Die linke Seite lässt sich also als Summe von 2 endlichen geometrischen Reihen darstellen.

84. Zeigen Sie für $x_m = 2m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,x_m) = \frac{1}{2} + n = \lim_{x \to x_m} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$