

**ÜBUNGEN ZU**  
**ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 08. 06. 2011

---

70. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Hyperbelfunktion  $\sinh(x)$ . Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe und zeigen Sie, dass die Summenfunktion der Taylor-Reihe mit der Funktion  $\sinh(x)$  für alle  $x$  aus dem Konvergenzbereich übereinstimmt.

71. Stellen Sie die Funktion  $\operatorname{arsinh}(x)$  als Potenzreihe dar. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich dieser Potenzreihe.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie bei der Funktion  $\arcsin(x)$  vor und betrachten Sie zunächst die abgeleitete Funktion.

72. Bestätigen Sie die folgende Identität für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$ :

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Hinweis:  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ .

73. Gegeben sei die Funktion  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zeigen Sie, dass die  $n$ -te Ableitung von  $f(x)$  folgende Form hat: Es gibt ein Polynom  $p_n(t)$  mit

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot p_n \left( \frac{1}{x} \right)$$

Hinweis: Induktion

74. Betrachten Sie folgende Erweiterung  $\bar{f}$  der Funktion  $f$  aus Übungsaufgabe 73 auf den größeren Definitionsbereich  $\mathbb{R}$ :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion  $\bar{f}$  ist auf  $\mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$\bar{f}^{(n)}(0) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Induktion und

$$\bar{f}^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{f}^{(n)}(h) - \bar{f}^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h} \cdot p_n \left( \frac{1}{h} \right)}{e^{\frac{1}{h^2}}}$$

75. Wie lautet die Taylor-Reihe der Funktion  $\bar{f}$  (siehe Übungsaufgabe 74) um den Punkt  $x_0 = 0$ ? Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe und lautet die Summenfunktion?

76. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

77. Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + x^2 t} dt.$$

Bestimmen Sie:

$$f(0), \quad f'(0) \quad \text{und} \quad f''(0).$$

78. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k! \cdot x^{2k}$$