ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 01. 06. 2011

---

61. Zeigen Sie für die Funktionen f_n aus Übungsaufgabe 53, dass für alle $\varepsilon < 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\infty,A_\varepsilon} = 0$$

mit

$$\|g\|_{\infty,A_\varepsilon} = \sup\{|g(x)|\colon x \in A_\varepsilon\} \quad \text{und} \quad A_\varepsilon = [0, 1-\varepsilon]$$

Hinweis: f_n besitzt ein Extremum bei $x^* = \frac{n}{n+1}$. Wie groß ist $\|f_n\|_{\infty,A_\varepsilon}$, falls $1-\varepsilon < x^*$?

62. Zeigen Sie für die Funktionen f_n aus Übungsaufgabe 53, dass für alle $\varepsilon < 1$ zusätzlich gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n'\|_{\infty,A_\varepsilon} = 0$$

Warum folgt dann das Ergebnis aus Übungsaufgabe 60?

Hinweis: f_n' besitzt ein Extremum bei $x^{**} = \frac{n-1}{n+1}$. Wie groß ist $\|f_n'\|_{\infty,A_\varepsilon}$, falls $1-\varepsilon < x^{**}$?

63. Gegeben sei die Folge $\delta_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{nx^2}{2}}.$$

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\; dx = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \delta_n(x)\; dx = 1$$

Hinweis: Substitution $u = \sqrt{n}\,x$.

64. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 63: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x \cdot \delta_n(x)\; dx = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b x^2 \cdot \delta_n(x)\; dx = 0$$

Hinweis: Substitution $u = \sqrt{n}\,x$.

65. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 63: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x^k \cdot \delta_n(x)\ dx = 0$$

Hinweis für $k > 2$: $|x^k| \leq C \cdot x^2$ mit $C = \sup\{|x|^{k-2} \colon x \in [a, b]\}$.

66. Zeigen Sie für alle Polynomfunktionen p und alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x) \cdot \delta_n(x)\ dx = p(0).$$

Hinweis: $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k\, x^k$.

67. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$. Gegeben sei eine Folge von Polynomfunktionen p_m, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x)\ dx = f(0).$$

Hinweis:

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x)\ dx - f(0) \\ &\quad = \int_a^b [f(x) - p_m(x)] \cdot \delta_n(x)\ dx + \left[\int_a^b p_m(x) \cdot \delta_n(x)\ dx - p_m(0)\right] + [p_m(0) - f(0)] \end{aligned}$$

Der erste und der dritte Term lassen sich jeweils durch $\|f - p_m\|_\infty$ abschätzen. Ist m hinreichend groß, werden diese Terme beliebig klein.

68. Zeigen Sie für die Funktionenfolge aus Übungsaufgabe 63: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b < 0$ oder $0 < a < b$ gilt:

$$\delta_n \xrightarrow{\text{glm}} 0 \quad \text{auf dem Definitionsbereich } A = [a, b].$$

69. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b < 0$ oder $0 < a < b$. Gegeben sei eine stetige Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cdot \delta_n(x)\ dx = 0.$$