ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 11. 05. 2011

---

43. Zeigen Sie: Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n^2}$$
konvergiert.

Hinweis: Gehen Sie genau so vor wie bei der Analyse der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$ und zeigen Sie $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|\leq|a_{n+1}|$.

44. Zeigen Sie: Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
konvergiert.

Hinweis: Gehen Sie analog wie bei der Analyse der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, vor: Betrachten Sie die Teilsummen a_1, a_2+a_3, $a_4+a_5+a_6+a_7$, $\ldots$, und schätzen Sie jede dieser Teilsummen durch a_1, $2a_2$, $4a_4$, $\ldots$, nach oben ab. Die Summe dieser oberen Schranken der Teilsummen, also $\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_k$, ist dann eine obere Schranke für die gesamte Summe. Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_k$.

45. Untersuchen Sie, für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ die Reihen
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n^\alpha}\quad\text{und}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$
konvergieren bzw. divergieren.

Hinweis für $\alpha>0$: Analoges Vorgehen wie in den Fällen $\alpha=1$ bzw. $\alpha=2$.

46. Untersuchen Sie, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$
konvergiert.

47. Untersuchen Sie, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$
konvergiert.

48. Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1}$$

konvergiert.

49. Seien $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$ und $k \in \mathbb{N}$. Der Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\overbrace{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - k + 1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!}$$

Zusätzlich vereinbart man: $\binom{\alpha}{0} = 1$.

(a) Zeigen Sie für $\boxed{\alpha \in \mathbb{N}}$ mit $\alpha < k$:

$$\binom{\alpha}{k} = 0.$$

(b) Zeigen Sie:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$$

(c) Stellen Sie eine ähnliche Formel für $\binom{-\frac{1}{2}}{k}$ auf.

50. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$: Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

konvergiert.

51. Zeigen Sie:

(a) Für $\boxed{\alpha \in \mathbb{N}}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha.$$

Hinweis: $\binom{\alpha}{k} =?$ für $k > \alpha$.

(b) Für $\boxed{\alpha = -1}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha.$$

Hinweis: $\binom{-1}{k} =?$.