ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 13. 04. 2011

---

34. Untersuchen Sie, unter genau welchen Bedingungen an $k \in \mathbb{Z}$ die Folge (a_n) mit

$$a_n = n^k$$

konvergent ist. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert. Falls die Folge nicht konvergiert, untersuchen Sie, ob die Folge beschränkt ist.

35. Untersuchen Sie, unter genau welchen Bedingungen an $k \in \mathbb{Z}$ die Folge (a_n) mit

$$a_n = n^{\frac{1}{k}}$$

konvergent ist. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert. Falls die Folge nicht konvergiert, untersuchen Sie, ob die Folge beschränkt ist.

36. Untersuchen Sie, unter genau welchen Bedingungen an $p \in \mathbb{R}$ die Folge (a_n) mit

$$a_n = n^p$$

konvergent ist. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert. Falls die Folge nicht konvergiert, untersuchen Sie, ob die Folge beschränkt ist.

37. Untersuchen Sie, unter genau welchen Bedingungen an $q \in \mathbb{R}$ die Folge (a_n) mit

$$a_n = q^n$$

konvergent ist. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert. Falls die Folge nicht konvergiert, untersuchen Sie, ob die Folge beschränkt ist.

38. Seien $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-i+1}{n}\right) \geq \left(\frac{i-1}{i}\right) \cdot \left(\frac{i-2}{i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{i}\right)$$

Hinweis: Vergleichen Sie die beiden ersten Faktoren, die beiden zweiten Faktoren, ….

39. Seien $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$. Zeigen Sie:

$$\binom{n}{i} \geq \left(\frac{n}{i}\right)^i.$$

Hinweis: Übungsbeispiel 38

40. Sei $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ und sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Zeigen Sie:

$$(1+x)^n \geq \binom{n}{i} x^i \geq \left(\frac{x}{i}\right)^i \cdot n^i$$

41. Sei $n, i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq n$ und sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$. Zeigen Sie:

$$q^n \leq \left(\frac{i \cdot q}{1-q}\right)^i \cdot \frac{1}{n^i}$$

Hinweis: Finden Sie zu q ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$q = \frac{1}{1+x}$$

und verwenden Sie anschließend die Abschätzung aus Übungsbeispiel 40.

42. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = n^p \cdot q^n.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung aus Übungsbeispiel 41 für $i = p + 1$.