

**ÜBUNGEN ZU**  
**ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 06. 04. 2011

---

25. Zeigen Sie mit Induktion nur mit Hilfe der Axiome der reellen Zahlen und den in der Vorlesung bewiesenen Folgerungen folgende Aussage: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq x < y$  gilt:

$$x^n < y^n$$

26. Sei  $k \in \mathbb{N}$  und seien  $a, x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$ ,  $(x_0)^k \geq a$ . Zeigen Sie für die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , die durch

$$x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k \cdot (x_n)^{k-1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist, für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(x_n)^k \geq a \quad \text{und} \quad x_{n+1} \leq x_n$$

Hinweis zur ersten Ungleichung: Induktion,

$$x_{n+1} = x_n \left[ 1 + \frac{a - (x_n)^k}{k \cdot (x_n)^k} \right]$$

Bernoullische Ungleichung.

Hinweis zur zweiten Ungleichung: folgt direkt aus der ersten Ungleichung.

27. Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q \neq 0$  und  $q \neq 1$ :

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

28. Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left( 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \right)^n > n$$

Hinweis: Untersuchen Sie die ersten drei Terme im Binomische Lehrsatz.

29. Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ :

$$\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n < 1 + \frac{n}{n^2 - n + 1} < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Hinweis:

$$\frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n} = \left( \frac{n^2}{n^2 + 1} \right)^n = (1 - \dots)^n$$

30. Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $i \leq n$ :

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \leq \binom{n+1}{i} \frac{1}{(n+1)^i}$$

Hinweis: Die Ungleichung lässt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^i = \left(\frac{n}{n+1}\right)^i \geq \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}}$$

Der Quotient der Binomialkoeffizienten lässt sich vereinfachen.

31. Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz

32. Zeigen Sie für alle  $n, i \in \mathbb{N}$  mit  $i \leq n$ :

$$\binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \leq \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^{i-1}}$$

33. Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Hinweis zur oberen Schranke: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz und die Abschätzung aus Übungsbeispiel 32.