ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 30. 03. 2011

---

17. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f\colon U \to \mathbb{C}$ und $g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph in U. Zeigen Sie: Die Funktion $f \cdot g$ ist holomorph in U und es gilt:
$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$
(Das Symbol $\cdot$ bezeichnet hier das Produkt komplexer Zahlen.)

18. Zeigen Sie für die komplexe Sinus- und Kosinusfunktion:
$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

19. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und seien $f\colon U \to \mathbb{C}$ und $g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph in U. Zeigen Sie für alle $a, b \in U$:
$$\int_a^b f'(z) \cdot g(z)\, dz = f(z) \cdot g(z)\Big|_a^b - \int_a^b f(z) \cdot g'(z)\, dz.$$
(Das Symbol $\cdot$ bezeichnet hier das Produkt komplexer Zahlen.)

20. Sei
$$Q(z) = c(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_m)^{r_m} = c \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{r_k}$$
mit $0 \neq c \in \mathbb{C}$, $r_k \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen Werten z_k. Die Werte z_k sind die Nullstellen des Polynoms Q, der dazugehörige Exponent r_k heißt die Vielfachheit der Nullstelle z_k. Zeigen Sie für jede einfache Nullstelle z_j, d.h. für jede Nullstelle z_j mit $r_j = 1$:
$$Q'(z_j) = c \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (z_j - z_k)^{r_k}$$
Hinweis: Verwenden Sie die Produktregel zur Bestimmung von $Q'(z)$ und setzen Sie anschließend $z = z_j$ ein.

21. Sei
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$
eine rationale Funktion und sei $z_j \in \mathbb{C}$ eine einfache Nullstelle von $Q(z)$. Zeigen Sie:
$$\operatorname{res}_{z_j} R = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}.$$
Hinweis: Sie dürfen die Darstellung von $Q(z)$ aus Übungsaufgabe 20 verwenden.

22. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x+x^2}\, dx.$$

23. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$$

24. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der rationalen Funktion

$$R(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$