

**ÜBUNGEN ZU  
ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II**

für den 23. 03. 2011

---

10. Das Gaußsche Gesetz für elektrische Felder im Vakuum lautet in integraler Form:

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_V \rho \, dx$$

für "alle" Volumen  $V \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial V$ , wobei  $\varepsilon_0$  die elektrische Feldkonstante,  $\vec{E}$  das elektrische Feld,  $\vec{n}$  den äußeren Einheitsnormalvektor auf  $\partial V$  und  $\rho$  die elektrische Ladungsdichte bezeichnen. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung erfüllt ist, falls  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$  mit

$$-\varepsilon_0 \Delta \phi = \rho.$$

Hinweis zum ersten Teil: Integrieren Sie die Differentialgleichung (1) über  $V$ .

Hinweis zum zweiten Teil:  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi$ .

11. Das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder lautet in integraler Form:

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

für "alle" Volumen  $V \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial V$ , wobei  $\vec{B}$  die magnetische Flussdichte und  $\vec{n}$  den äußeren Einheitsnormalvektor auf  $\partial V$  bezeichnen. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung erfüllt ist, falls  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  mit einem beliebigen Vektorfeld  $\vec{A}$ .

12. Aus dem Induktionsgesetz von Faraday folgt im stationären Fall:

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0$$

für "alle" Flächen  $S \subset \mathbb{R}^3$  mit Randkurve  $\partial S$ . Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung erfüllt ist, falls  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$  mit einem beliebigen Skalarfeld  $\phi$ .

Hinweis zum ersten Teil: Integrieren Sie die Differentialgleichung (2) über  $S$ .

13. Aus dem Ampèreschen Gesetz folgt im stationären Fall für das Vakuum:

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

für "alle" Flächen  $S \subset \mathbb{R}^3$  mit Randkurven  $\partial S$ , wobei  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante,  $\vec{n}$  den Einheitsnormalvektor auf  $S$  und  $\vec{j}$  die elektrische Stromdichte bezeichnen. Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Gesetzes, falls gilt:

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung erfüllt ist, falls  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  mit

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{A} = \vec{j} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Hinweis:  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ .

14. Die komplexe Exponentialfunktion  $e^z$  wurde in der Vorlesung folgendermaßen eingeführt:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{für } x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Diese Funktion lässt sich auch als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  interpretieren. Stellen Sie diese Funktion auf und überprüfen Sie, ob die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Ist die komplexe Exponentialfunktion holomorph? Wenn ja, wie lautet die Ableitung?

15. Bestimmen Sie durch direkte Verwendung der Definition des komplexen Kurvenintegrals den Wert von

$$\int_C e^z \, dz$$

entlang der Kurve  $C$ , die vom Ursprung  $0$  zu einem Punkt  $w \in \mathbb{C}$  entlang einer Geraden führt.

16. Die beiden komplexen Funktionen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  und  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = |z|^2$  stimmen für reelle Argumente mit der reellen Funktion  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x^2$  überein. Überprüfen Sie, ob  $f$  oder  $g$  holomorph in  $\mathbb{C}$  sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweilige Ableitung.