ÜBUNGEN ZU

ANALYSIS FÜR PHYSIKER(INNEN) II

für den 17. 03. 2011

---

1. Sei C die Kurve mit der Parametrisierung $\gamma\colon [-a,a] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)^T$. Zeigen Sie, dass die Punkte $(x,y)^T = \gamma(t)$ dieser Kurve auf der Hyperbel
$$x^2 - y^2 = 1$$
liegen. Stellen Sie die Kurve C grafisch dar.

2. Berechnen Sie für die Kurve C aus Übungsbeispiel 1
$$\int_C (-y\ dx + x\ dy).$$

3. Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve C aus Übungsbeispiel 1 sind durch
$$\gamma_A = (\cosh a, -\sinh a)^T, \quad \gamma_E = (\cosh a, \sinh a)^T$$
gegeben. Sei C_A die Gerade zwischen dem Ursprung $(0,0)^T$ und γ_A und sei C_E die Gerade zwischen γ_E und dem Ursprung $(0,0)^T$. Die geschlossene Kurve $C_A + C + C_E$ umschließt den Bereich D. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel
$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y\ dx + x\ dy)$$
den Flächeninhalt von D.

4. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $D \subset A$ ein Normalbereich bezüglich beider Koordinatenachsen. Seien $f\colon A \to \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld und $g\colon A \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:
$$\int_D \nabla f(x) \cdot g(x)\ dx = \int_{\partial D} f(x)\, g(x) \cdot n(x)\ ds - \int_D f(x)\, \nabla \cdot g(x)\ dx$$
Hinweis: Partielle Integration

5. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $D \subset A$ ein Normalbereich bezüglich beider Koordinatenachsen. Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon \partial D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Angenommen, die Funktion $u\colon A \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung
$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D$$
und die Randbedingung
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial D.$$

Zeigen Sie, dass für alle stetig differenzierbare Funktionen $v\colon A \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_D \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\ dx = \int_D f(x)v(x)\ dx + \int_{\partial D} g(x)v(x)\ ds$$

Hinweis: 1. Greensche Identität.

6. Sei S jener Teil der Ebene $2x + 2y + z = 4$, für den gilt: $x + y \geq 1$ und $x \leq 1$ und $y \leq 1$. Stellen Sie S grafisch dar, finden Sie eine Parameterdarstellung von S und berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$|S| = \int_S 1\ d\sigma$$

den Flächeninhalt $|S|$ von S.

7. Berechnen Sie für die Fläche S aus Übungsaufgabe 6

$$\int_S f(x,y,z) \cdot n(x,y,z)\ d\sigma \quad \text{für} \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$$

8. Sei $S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon z = x^2 + y^2 \leq 1\}$ (Paraboloidfläche). Stellen Sie S grafisch dar, finden Sie eine Parameterdarstellung von S und berechnen Sie den Flächeninhalt $|S|$.

   Hinweis: Polarkoordinaten für x und y.

9. Berechnen Sie für die Fläche S aus Übungsaufgabe 8

$$\int_S (1 - z^2)\ d\sigma$$