$\boxed{34}$ Sei Ω_i ein nicht fixiertes (*floating*) Teilgebiet und A_i, $\widetilde{A}_i : X_i \to X_i^*$ die zu den Bilinearformen

$$\left.\begin{array}{rcl} a_i(v,\, w) & := & \alpha_i \int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla w \, dx \\ \widetilde{a}_i(v,\, w) & := & a_i(v, w) + \beta\, v(x^*)\, w(x^*) \end{array}\right\} \quad \text{für } v,\, w \in X_i := V^h(\Omega_i)$$

gehörigen Operatoren, wobei x^* ein beliebiger Knoten in $\overline{\Omega}_i$ ist und $\beta > 0$. Zeige:

(a) $\widetilde{A}_i : X_i \to X_i^*$ ist positiv definit,

(b) $\widetilde{A}_i^{-1}$ ist eine Pseudoinverse zu A_i,

(c) $\forall f \in \mathrm{range}(A_i) : (\widetilde{A}_i^{-1} f)(x^*) = 0$.

$\boxed{35}$ Es gelten die Bezeichnungen von Bsp. $\boxed{34}$. Seien $\underline{A_i}$ und $\underline{\widetilde{A}_i}$ die zugehörigen Matrix-Darstellungen bezüglich der nodalen FE Basis.

(a) Zeige (für eine quasi-uniforme Vernetzung):

$$(\underline{\widetilde{A}_i}\, \underline{v},\, \underline{v})_{\ell^2} \;\lesssim\; (\alpha_i\, h^{d-2} + \beta)\, \|\underline{v}\|_{\ell^2}^2$$

Hinweis: Inverse Ungleichung.

(b) Für $d = 2$ sei Ω_i ein Grobgitter Dreieck mit Diameter H und Fläche $\approx H^2$. Zeige (für eine quasi-uniforme Vernetzung):

$$\alpha_i\, \|v\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \;\lesssim\; H^2 \max\Big(1 + \log(H/h),\, \frac{\alpha_i\, |\Omega_i|}{\beta\, H^2}\Big)\, \widetilde{a}_i(v,\, v).$$

Hinweis: Verwende die Ungleichung

$$\|v - v(x^*)\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \;\lesssim\; H^2(1 + \log(H/h))\, |v|_{H^1(\Omega_i)}^2 \qquad \forall v \in V^h(\Omega_i),$$

welche man leicht mit Hilfe von Lemma 5.13 beweisen kann.

(c) *BONUS:*
In welcher Ordnung muss man den Regularisierungsparameter β (unter den Zusatzvoraussetzungen in (b)) wählen, sodass die Konditionszahl von $\underline{\widetilde{A}_i}$ möglichst klein wird?

$\boxed{36}$ Wir betrachten die nicht vorkonditionierte FETI-Methode mit $Q = I$. Zeige die Identität

$$\widetilde{d} - P^\top F\, \widetilde{\lambda}^{(k)} \;=\; B\, u^{(k)}$$

während der CG Iteration, wobei

$$\begin{array}{rcl} u^{(k)} & := & A^\dagger(f - B^\top(\lambda_0 + \widetilde{\lambda}^{(k)})) + R\, \xi^{(k)}, \\ \xi^{(k)} & := & -(G^\top G)^{-1} G^\top B A^\dagger(f - B^\top(\lambda_0 + \widetilde{\lambda}^{(k)})), \end{array}$$

d.h. das Residuum kontrolliert die Sprünge in der Lösung.