

Programmierung.

Im Folgenden betrachten wir das 1D Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1 + 2x & \forall x \in (0, 1) \\ u(0) &= 3 \\ u'(1) &= 0, \end{aligned}$$

FE-diskretisiert mit n Elementen und unterteilt in N Teilgebiete sodass ca. $\lfloor \frac{n}{N} \rfloor$ Elemente pro Teilgebiet vorliegen. Die Eliminierung der inneren Freiheitsgrade in jedem Teilgebiet führt auf das Schur-Komplement System

$$\underline{S} \underline{u}_\Gamma = \underline{g},$$

wobei \underline{g} die Länge $N + 1$ hat. Wir fassen dies als Grobgittersystem auf und verwenden keine Iterationsmethode für dessen Lösung (die Matrix \underline{S} ist wieder tridiagonal). Die folgenden Aufgaben sollen für $(n, N) = (16, 4), (256, 16), (1024, 32)$ funktionieren.

31 (a) Erweitere die Routine von Bsp. **27** auf

```
void SchurComplement (const Matrix& A, const Vector& f,
                      Mat22& S, Vec2& g);
```

wobei $\underline{A}=\underline{A}$ und $\underline{f}=\underline{f}$ die Steifigkeitsmatrix und der Lastvektor am *Teilgebiet* bezeichnen, $\underline{S}=\underline{S} = \underline{A}_{\Gamma\Gamma} - \underline{A}_{\Gamma I} \underline{A}_{II}^{-1} \underline{A}_{I\Gamma}$ und $\underline{g}=\underline{g} = \underline{f}_\Gamma - \underline{A}_{\Gamma I} \underline{A}_{II}^{-1} \underline{f}_I$.

(b) Schreibe eine Routine

```
void Extension (const Matrix& A, const Vector& f, const Vec2& uG,
               Vector& u);
```

welche die Interfacewerte $\underline{u}_G=\underline{u}_\Gamma$ nach innen gemäß der Gleichung am Teilgebiet fortsetzt:

$$\underline{u}_I = \underline{A}_{II}^{-1}(\underline{f}_I - \underline{A}_{I\Gamma} \underline{u}_\Gamma) \quad \underline{u} = \underline{u} = "[\underline{u}_\Gamma | \underline{u}_I]"$$

32 (a) Assembliere und speichere Steifigkeitsmatrix und Lastvektor (inclusive eventuell vorhandener Randbedingung) für jedes *Teilgebiet*.

(b) Stelle die globale Schur-Komplement Matrix \underline{S} und den Vektor \underline{g} durch Assemblierung auf.

Hinweis: Benutze die Routine `SchurComplement` aus Bsp. **31**.

33 (a) Löse das globale Schur-Komplement System (mit dem Thomas-Algorithmus).

(b) Vervollständige die Lösung \underline{u}_Γ zur globalen Lösung auf ganz $[0, 1]$.

Hinweis: Benutze die Routine `Extension` aus Bsp. **31**.

Hinweis 2: Um Korrektheit zu testen, entweder mit exakter Lösung oder mit Lösung des globalen FE Systems vergleichen.