

Für eine der folgenden Übungsaufgaben verwenden wir (ohne Beweis) die folgende Sobolev-Ungleichung: Für ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  existiert eine Konstante  $C$  sodass für alle  $r \geq 1$ :

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C r^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (10.1)$$

- 28** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet mit  $\text{diam}(\Omega) = 1$ ,  $\mathcal{T}^h(\Omega)$  eine formreguläre, quasi-uniforme Zerlegung, und  $V^h(\Omega)$  ein darauf konstruierter FE-Raum. Zeige die inverse Ungleichung

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C h^{-2/r} \|u\|_{L^r(\Omega)} \quad \forall u \in V^h(\Omega)$$

für  $r \geq 1$ .

*Hinweis:* Elementweise mit Transformation auf das Referenzelement.

- 29** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet mit  $\text{diam}(\Omega) = 1$ ,  $\mathcal{T}^h(\Omega)$  eine formreguläre, quasi-uniforme Zerlegung, und  $V^h(\Omega)$  ein darauf konstruierter FE-Raum. Zeige dass eine Konstante  $C$  existiert sodass

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \leq C (1 + \log(h^{-1})) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in V^h(\Omega).$$

Wie muss die Ungleichung für  $H := \text{diam}(\Omega) \neq 1$  lauten damit  $C$  unabhängig von  $H$  bleibt?

*Hinweis:* Kombiniere Beispiel **28** und (10.1). Dann wähle  $r = 1 + \log(h^{-1})$ .

- 30** Wir betrachten den Würfel  $\Omega = (0, 1)^3$  und fixieren eine seiner Kanten  $\mathcal{E}$ . Sei  $\mathcal{T}^h(\Omega)$  eine uniforme Zerlegung in Würfel der Kantenlänge  $h$ , welche an den drei Koordinatenachsen ausgerichtet sind, und sei  $V^h(\Omega)$  der FE-Raum der trilinearen Funktionen auf  $\mathcal{T}^h(\Omega)$ . Zeige, dass eine Konstante  $C$  existiert sodass

$$\|u\|_{L^2(\mathcal{E})}^2 \leq C (1 + \log(h^{-1})) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in V^h(\Omega).$$

Wie lautet die Ungleichung für  $\Omega = (0, H)^3$  damit  $C$  unabhängig von  $H$  bleibt?

*Hinweis:* Verwende in jedem Punkt auf der Kante  $\mathcal{E}$  die Ungleichung aus Bsp. **29**.