Fast Solvers SS 2011
8. Übung Do, 12. Mai 2011, 15:30 – 16:15, T 211

$\boxed{22}$ Sei Ω ein Lipschitzgebiet und $F \subset \partial\Omega$ ein Teil des Randes mit positivem Oberfächenmaß. Zeige dass die Normen

$$|u|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\operatorname{diam}(\Omega)^2}\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \text{und} \qquad |u|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\operatorname{diam}(\Omega)}\,\|u\|^2_{L^2(F)}$$

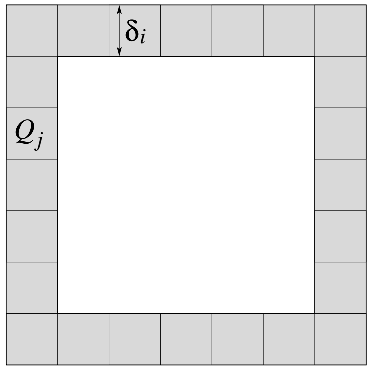
auf $H^1(\Omega)$ äquivalent sind mit von $\operatorname{diam}(\Omega)$ unabhängigen Äquivalenzkonstanten.

Hinweis: Beweise das Resultat für den Fall $\operatorname{diam}(\Omega) = 1$ mit dem Sobolev'schen Normierungssatz und führe den allgemeinen Fall darauf zurück.

$\boxed{23}$ Zeige die Ungleichung

$$\delta_i^{-2}\,\|v\|^2_{L^2(\Omega_i^{\mathrm{bl}})} \;\lesssim\; \left(1 + \frac{\operatorname{diam}(\Omega_i)}{\delta_i}\right)|v|^2_{H^1(\Omega_i)} + \frac{1}{\delta_i \operatorname{diam}(\Omega_i)}\,\|v\|^2_{L^2(\Omega_i)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega_i)$$

für den Fall dass Ω_i und $\Omega_i^{\mathrm{int}} \neq \emptyset$ je ein Quadrat sind, wobei die in "$\lesssim$" versteckten Konstanten unabhängig von δ_i und $\operatorname{diam}(\Omega_i)$ sein sollen.



Hinweis: Zerlege Ω_i^{bl} in lauter kleine Quadrate Q_j mit Seitenlänge δ_i und zeige (mit Bsp. $\boxed{22}$) dass

$$\delta_i^{-2}\,\|v\|^2_{L^2(Q_j)} \;\lesssim\; |v|^2_{H^1(Q_j)} + \delta_i^{-1}\,\|v\|^2_{L^2(\partial Q_j \cap \partial\Omega_i)}\,.$$

Benutze dann Bsp. $\boxed{22}$ nocheinmal für $\Omega = \Omega_i$.

$\boxed{24}$ Zeige mit Hilfe von Bsp. $\boxed{23}$ die verbesserte Abschätzung

$$\kappa(C^{-1}_{\mathrm{ad},2}A) \;\lesssim\; 1 + \max_{i=1}^{N} \frac{\operatorname{diam}(\Omega_i)}{\delta_i}$$

für den überlappenden Schwarz Vorkonditionierer mit Grobgitter im Fall dass alle Teilgebiete Ω_i die Voraussetzungen von Bsp. $\boxed{23}$ erfüllen.