

**Programmierung.** Folgende Funktionalität sollte das 1D-Programm aus der Übung Numerische Methoden für Partielle Differentialgleichungen mitbringen:

- 1D FE Gitter, Tridiagonalmatrix-Klasse
- Assemblierung von Steifigkeitsmatrix und Lastvektor zum Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, 1), \quad u(0) = 3, \quad u'(1) = -1/2,$$

diskretisiert mit einem äquidistantem Gitter.

- PCG-Verfahren
- Klassischer Jacobi-Vorkonditionierer
- Direkter Löser für ein tridiagonales Gleichungssystem

**13** Gegeben sei die symmetrisch, positiv definite Tridiagonalmatrix

$$J = \begin{bmatrix} \delta_0 & \gamma_0 & & 0 \\ \gamma_0 & \delta_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_{n-2} \\ 0 & & \gamma_{n-2} & \delta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom  $\det(J - \lambda I) = p_n(\lambda)$  erfüllt die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &:= 1, \\ p_1(\lambda) &:= \delta_0 - \lambda, \\ p_i(\lambda) &:= (\delta_{i-1} - \lambda)p_{i-1}(\lambda) - (\gamma_{i-2})^2 p_{i-2}(\lambda) \quad \text{für } i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Leite daraus eine Rekursionsformel für  $p'_i(\lambda)$  her und implementiere die Auswertung von  $p_n(\lambda)$ ,  $p'_n(\lambda)$ .

**14** Im positiv definiten Fall gilt für

$$0 \leq \lambda_{\min}(J), \quad \lambda_{\max}(J) \leq \rho(J) \leq \|J\|_{\infty},$$

wobei  $\|\cdot\|_{\infty}$  die Zeilenmaximumsnorm bezeichnet.

Programmiere eine Routine, die mithilfe des Newton-Verfahrens (und den obigen Startwerten  $0$ ,  $\|J\|_{\infty}$ )  $\lambda_{\min}(J)$  und  $\lambda_{\max}(J)$  berechnet. Teste die Routine für eine einfache Matrix.

**15** Speichere die Folgen  $(\alpha_k)_{k=0}^{n-1}$  und  $(\beta_k)_{k=0}^{n-2}$ , welche das PCG-Verfahren (siehe Algorithm 2 im Skriptum) nach  $n$  Schritten erzeugt, und berechne die extremalen Eigenwerte der Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_0} & -\frac{\sqrt{\beta_0}}{\alpha_0} & & 0 \\ -\frac{\sqrt{\beta_0}}{\alpha_0} & \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\beta_0}{\alpha_0} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\sqrt{\beta_{n-2}}}{\alpha_{n-2}} \\ 0 & & -\frac{\sqrt{\beta_{n-2}}}{\alpha_{n-2}} & \frac{1}{\alpha_{n-1}} + \frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}} \end{bmatrix}.$$

Diese sind gute Schätzer für die extremalen Eigenwerte des vorkonditionierten Systems  $C^{-1}A$ . Sei  $C^{-1}$  der klassische Jacobi-Vorkonditionierer. Schätze die Konditionszahl  $C^{-1}A$  für  $h = 1/128$ ,  $h = 1/256$ ,  $h = 1/512$ ,  $h = 1/1024$ .